BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2005 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3.

2.a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n, dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.

b. Établir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).

3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.

4. a. Établir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0\,;\pi[$:

$$T_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1\,;1[$, que l'on explicitera.

c. Établir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1} \right).$$

d. En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.

5. a. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0\,;\pi[$:

$$\sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)\, T_n(\cos\theta) = 0 \;.$$

Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) :

$$\theta \longmapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta \,.$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(\mathrm{X}^2-1)\, T_n'' + 3\,\mathrm{X}\, T_n' - (n^2+2n)\, T_n = 0 \;.$$

Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geqslant 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré inférieur ou égal à n.
On note L l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme $L(P)$ défini par :

$$L(P) = (\mathrm{X}^2-1)P'' + 3\mathrm{X}P' \;.$$

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2. a. Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$.

b. En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note φ l'application qui, à un couple (P, Q) de polynômes de E, associe le réel $\varphi(P, Q)$ défini par :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E :

$$\varphi\big(L(P), Q\big) = \varphi\big(P, L(Q)\big)\,.$$

Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\varphi\big(L(P), Q\big) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\; P'(x)\, Q'(x)\, \mathrm{d}x \,.$$

3. Établir que $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de E.