0.1. Problème Polynômes

0.1.1. Préambule:

0.1.2. Polynômes d'interpolation de Lagrange:

1. Le degré de chaque polynôme, L_i, est $n-1$ et admet $n-1$ racines distinctes qui sont les $(r_j)_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq i}}$, son coefficient dominant est égal à 1.
2. Si $i \neq k$, d'aprés la question précédente r_k est une racine de L_i, donc $L_i(r_k)=0$ si $i\neq k$.
   Si $i=k$, alors $L_i(r_k)=L_i(r_i)=\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_i-r_j}{r_i-r_j}=1$.
3. On d'abord P est somme de polynômes tous de degré $n-1$, donc son degré est inférieur à $n-1$.
   Vérifions ensuite que P interpole f aux point $(r_k)_{1\leq k\leq n}$,
   en effet $P(r_k)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(r_i)L_i(r_k)=f(r_k)$ car $\begin{array}{ll} L_i(r_k) & =0 \quad \text{si } i\neq k \\ & =1 \quad \text{si } i=k \end{array}$.
   Et enfin vérifions que P est l'unique polynôme de degré $\leq n-1$ qui interpole f aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$, en effet supposons qu'il existe un autre polynôme Q de degré $\leq n-1$ qui interpole f aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$, alors $P(r_k)=Q(r_k)=f(r_k)$, ainsi $P-Q$ est un polynôme de degré $\leq n-1$, qui admet n racines distinctes qui sont les $(r_k)_{1\leq k\leq n}$, il est donc nul, d'où $P=Q$, d'où l'unicité.

0.1.3. Polynômes de tchebechev:

1. $T_{n+1}(X)+T_{n-1}(X)=\cos((n+1)\arccos(X))+\cos((n-1)\arccos(X))$
   $=2\cos(n\arccos(X))\cos(\arccos(X))=2XT_n(X)$, d'où $T_{n+1}(X)=2XT_n(X)+T_{n-1}(X)$.
2. On va montrer par récurrence forte que T_n est un polynôme, que son degré est n et que son coefficient dominant vaut $\frac{1}{2^{n-1}}$ si $n\geq 1$.
   On a $T_0(X)=1, T_1(X)=X$, donc le résultat est vrai pour $n=0$ et $n=1$.
   Supposons le résultat vrai pour $n-1$ et n, alors $T_{n+1}(X)=2XT_n(X)-T_{n-1}(X)$ est aussi un polynôme comme somme et produit de polynômes.
   D'autre part, on rappelle d'abord que si $\deg(A)<\deg(B)$, alors $\deg(A+B)=\deg(B)$ et $\text{co}(A+B)=\text{co}(B)$, ainsi on a : $\deg(2XT_n(X))=n+1$ et $\deg(T_{n-1}(X))=n-1$, d'où $\deg T_{n+1}(X)=\deg(2XT_n(X)-T_{n-1}(X))=\deg(2XT_n(X))=\deg(T_n)+1=n$, et $\text{co}(T_{n+1})=\text{co}(2XT_n(X)-T_{n-1}(X))=\text{co}(2XT_n(X))=2\text{co}(T_n)=\frac{1}{2^n}$.
3. $T_n(\cos(t))=\cos(n\arccos(\cos t))=\cos(nt)$.
   Cherchons d'abord les racines de T_n dans $[-1,1]$. Soit $x\in[-1,1]$ une racine de T_n, posons $t=(n\arccos(x)$, on a $x=\cos t$, donc $T_n(x)=T_n(\cos(t))=\cos(nt)=0 \Leftrightarrow nt=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow t=\frac{2k+1}{n}\pi \Leftrightarrow x=\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)$, les racines de T_n dans $[-1,1]$ sont donc les $x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right)$ tel que : $k\in\mathbb{Z}$, ainsi $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ sont n racines distinctes de T_n qui est de degré n donc sont exactement les racines de T_n.
4. $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|=\sup\limits_{x=\cos t}|T_n(x)|=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|T_n(\cos t)|=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\cos(nt)|=1$.

0.1.4. Recherche des points réalisant la meilleure interpolation:

1. Comme P interpole f aux points $(r_i)_{1\leq i\leq n}$, alors $f(r_i)=P(r_i)$, or $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t-r_i)$ pour $t=r_i$, donc g admet déjà n racines distinctes qui sont les $(r_i)_{1\leq i\leq n}$.
   D'autre part $g(x)=f(x)-P(x)-A\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)=f(x)-P(x)-(f(x)-P(x)=0$ puisque

$A = \frac{f(x)-P(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-r_i)}$ ce qui donne une autre racine de g, donc g s'annule $n+1$ fois sur $[-1,1]$.

2. En appliquant le *théorème de Rolle* entre les $n+1$ racines de g, on conclut l'existence de n racines pour g', en l'appliquant encore une fois entre ses n racines de g' on conclut l'existence de $n-2$ racines pour g'' et ainsi de suite jusqu'à affirmer l'existence d'au moins une racine de $g^{(n)}$ dans $[-1,1]$.
3. $Q^{(n)} = n!\mathrm{co}(P)$, c'est un résultat du cours.
4. Posons $Q(X) = \prod\limits_{i=1}^{n} X - r_i$ et soit $\exists c_x \in [-1,1]$ tel que : $g^{(n)}(c_x) = 0$, alors $f^{(n)}(c_x) - P^{(n)}(c_x) - AQ^{(n)}(c_x) = 0$, or P est un polynôme de degré $\leq n-1$, donc $P^{(n)} = 0$ et Q est un polynôme de degré n unitaire donc $Q^{(n)} = n!$, d'où $A = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$.
5. On a $g(x) = 0$, donc $|P(x) - f(x)| = |A||\prod\limits_{i=1}^{n}|x-r_i| = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}|\prod\limits_{i=1}^{n}|x-r_i|$

   $\leq \frac{1}{n!}\sup\limits_{t\in[-1,1]}\left|f^{(n)}(t)\right| \sup\limits_{t\in[-1,1]}\prod\limits_{i=1}^{n}|t-r_i| = \frac{M}{n!}\sup\limits_{t\in[-1,1]}\prod\limits_{i=1}^{n}|t-r_i|$.
6. Si les r_u sont les racines du n-ème *polynômes de tchebychev*, amis aussi de Q qui est unitaire alors $T_n(X) = \mathrm{co(T_n)}\prod\limits_{i=1}^{n} X - r_i = 2^{n-1}Q(X)$, d'où $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}\sup\limits_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$.
7. (a) $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$ car Q et $\frac{T_n}{2^{n-1}}$ sont tous les deux des polynômes de degré n mais unitaires, donc le coefficient de X^n dans $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est nul.

   (b) On a : $\left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = Q\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - \frac{T_n}{2^{n-1}}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = Q\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$, or $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$, en particulier $-\frac{1}{2^{n-1}} < Q\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) < \frac{1}{2^{n-1}}\right.$, d'où
   $-\frac{1+(-1)^k}{2^{n-1}} < \left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) < \frac{1-(-1)^k}{2^{n-1}} \quad \forall 0 \leq k \leq n$.
   Si k est pair alors, $\left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) < 0$ et $(-1)^k > 0$.
   Si k est impair alors, $0 < \left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ et $(-1)^k < 0$.

   (c) D'aprés la question précédente $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ admet des signes opposés en $n+1$ valeurs successives, qui sont $-1 < \cos\frac{n-1}{n}\pi < \ldots < \cos\frac{\pi}{n} < 1$, en appliquant le TVI entre ses valeurs, on en déduit que $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ s'annule au moins n fois.

   (d) Ainsi $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est de degré inférieur à $n-1$ et admet au moins n, donc est nul, d'où $Q = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ et par suite $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)| = \frac{\sup\limits_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$, d'où une contradiction.
   D'où $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$
8. $\forall Q$ de degré n on a $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ et pour les polynômes de Tchebychev qui sont aussi de degré n on a : $\sup\limits_{x\in[-1,1]}|T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$, donc ce sont ces polynômes pour lesquels le $\sup$ est minimal c'est à dire ceux qui réalisent la meilleure interpolation.

0.2. Exercice Fractions rationnelles:

$$\frac{1}{X-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{X+1} + \frac{\frac{3}{4}}{(X+1)^2} + X$$

FIN.