.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DS 5 (07-08) : *Espaces vectoriels Polynômes*

Mardi le 05 Février 2008

Durée : 3heures 30 mn.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les doubles feuilles de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

PREMIER PROBLÈME

Extrait du concours marocain 2007, TSI.

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Première partie

Soit n un entier naturel non nul.

1) a) **Quel est le degré de P_n ?**
   b) **Que peut-on dire de la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geq 2n+1$?**
2) a) **Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.**
   b) **Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.**
3) **Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.**
   a) **Montrer que, pour tout réel x,**

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}.$$

   On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée k-ième d'un produit.
   b) **En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.**
   c) **Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.**

Deuxième partie

1) **Soit n un entier naturel non nul.**
   a) **Étudier la fonction P_n sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$; dresser son tableau de variations.**
   b) **En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$ puis déterminer sa borne supérieure notée β_n : $\beta_n = \sup\limits_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x)$.**
2) **α étant un réel strictement positif, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}, n \geq 1$.**
   a) **Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0.**

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

c) Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$?

3) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Montrer que ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Troisième partie

On se propose de montrer l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d, tels que $\pi = \frac{c}{d}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c-dx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi Q_n(x)\sin x\ dx.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{c^2}{4d}\right)^n$, puis en déduire la limite de $(I_k)_{k\geq 1}$.

2) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.

3) En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n}\left(Q_n^{(k)}(\frac{c}{d})\cos(\frac{c}{d}+k\frac{\pi}{2}+\pi) - Q_n^{(k)}(0)\cos(k\frac{\pi}{2}+\pi)\right).$$

4) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier.

5) Conclure au sujet de l'hypothèse $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

.

Fin