

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَعَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

DS 5 (07-08) : *Espaces vectoriels* *Polynômes*

Mardi le 05 Février 2008

Durée : 3heures 30 mn.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numérotter les doubles feuilles de la façon suivante : $1/n, 2/n, \dots, n/n$ où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

PREMIER PROBLÈME

Extrait du concours marocain 2007, TSI.

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n , P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Première partie

Soit n un entier naturel non nul.

- 1) a) Quel est le degré de P_n ?
b) Que peut-on dire de la dérivée k -ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geq 2n + 1$?
- 2) a) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
b) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \dots, n - 1\}$.
- 3) Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.
a) Montrer que, pour tout réel x ,

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^n C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a - bx)^{n-k+p}.$$

On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée k -ième d'un produit.

- b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a , b , n et k .
- c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

Deuxième partie

- 1) Soit n un entier naturel non nul.
a) Étudier la fonction P_n sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$; dresser son tableau de variations.
b) En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$ puis déterminer sa borne supérieure notée β_n : $\beta_n = \sup_{0 \leq x \leq \frac{a}{b}} P_n(x)$.
- 2) α étant un réel strictement positif, on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :
 $u_n = \frac{\alpha^n}{n!}, n \geq 1$.
a) Montrer que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

- b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.
 - c) Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n \geq 1}$?
- 3) Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Montrer que ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Troisième partie

On se propose de montrer l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d , tels que $\pi = \frac{c}{d}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c - dx)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi Q_n(x) \sin x \, dx.$$

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{n!} \left(\frac{c^2}{4d}\right)^n$, puis en déduire la limite de $(I_k)_{k \geq 1}$.
- 2) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.
- 3) En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(Q_n^{(k)}\left(\frac{c}{d}\right) \cos\left(\frac{c}{d} + k\frac{\pi}{2} + \pi\right) - Q_n^{(k)}(0) \cos\left(k\frac{\pi}{2} + \pi\right) \right).$$

- 4) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier.
- 5) Conclure au sujet de l'hypothèse $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

.

Fin