CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Corrigé DS Commun 8: *Polynômes et Fractions rationnelles Intégration sur un segment*

Lundi 11 Mai 2009
Durée : 4 heures

Blague du jour :
• Que dit le 0 au 8 ?
Réponse : Tiens ! tu as mis ta ceinture...
• Savez-vous pourquoi, à CUBA, il n'y a pas d'églises ?
C'est parce que les "fidèles cassent trop".

Personnalité du jour — ***Ibn Batuta***
Ibn Battûta, (1304 à Tanger-1369 à Marrakech), est un explorateur et voyageur marocain, parcourant 120 000 km en 28 ans de voyages qui l'amènent à l'Egypte, à La Mecque, à La Palestine, à l'Irak et Iran, à l'Inde, à la Chine, au Khazakhistan, à l'Andalousie, au Mali. Ses récits, compilés par Ibn Juzayy en un livre appelé Rihla (voyage) sont plus précis que ceux de Marco Polo, mais contiennent plusieurs passages qui relèvent clairement de la pure imagination, notamment ceux décrivant des êtres surnaturels.

Exercice :

1) $\dfrac{x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{1}{4(x-1)^2} + \dfrac{1}{4(x+1)} + \dfrac{1}{4(x+1)^2}$.

2) $\dfrac{x}{x^4+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)$.

3) $\dfrac{x^n+1}{x^n-1} = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\omega^k}{n(x-\omega^k)}$ **où** $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$

Problème 2 :

I. Résultats préliminaires.

1) a) $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^y h(x)\,\mathrm{d}t \int_0^y h(t)\,\mathrm{d}t = yh(x) + H(y)$.

b) **Posons :** $u = x+t$**, alors** $\displaystyle\int_x^{x+y} h(u)\,\mathrm{d}u = H(x+y) - H(x)$**, puis utiliser le résulat de la question précédente.**

c) **En permutant les rôles de** x **et** y**, on obtient :** $xh(y) = H(x+y) - H(x) - H(y) = yh(x)$.

d) **Pendre $y = 1$ dans la relation $xh(y) = yh(x)$.**

2) a) **F est dérivable sur I, en tant que primitive d'une fonction continue f, avec $F' = f$.**

b) i. **$F_1(x) = F(v(x))$ est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec $F_1'(x) = v'(x)F'(v(x)) = v'(x)f(v(x))$.**

ii. **$F_1(x) = F(v(x)) - F(u(x))$ est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec**

$$F_1'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \tag{1}$$

iii. **Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors F_1 et F_2 le sont aussi, en tant que composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

3) **Posons $u = x + t$, alors**
$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u + \sin x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x G_1(x) + \sin x G_2(x) \end{aligned}$$

où $G_1(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u$ et $G_2(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u$. D'après (??) on a :
$G_1'(x) = g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)$ **et** $G_2'(x) = g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)$. **Ainsi**
$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sin x G_1(x) + \cos x G_1'(x) + \cos x G_2(x) + \sin x G_2'(x) \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\left[-\sin x\cos u + \cos x \sin u\right]\mathrm{d}u + \cos x\left[g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)\right] \\ &\quad + \sin x\left[g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)\right] \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u + g(b+x)\left[\cos x\cos(b+x) + \sin x\sin(b+x)\right] \\ &\quad - g(a+x)\left[\cos x\cos(a+x) + \sin x \sin(b+x)\right] \\ &= \int_a^b g(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t + g(b+x)\cos a - g(a+x)\cos a \qquad \textbf{changement de variable : } t = u - x \end{aligned}$$

II. Étude d'une équation fonctionnelle

1) **Prenons $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, d'où $f(0)^2 = 0$, donc $f(0) = 0$.**

2) a) **Prendre $y = a$, avec $f(a) \neq 0$.**

b) **Soit F une primitive de f, donc $f(x) = \dfrac{1}{f(a)}(F(x+a) - F(x-a))$ est dérivable en tant que composée et différence de fonctions dérivables, avec $f'(x) = \dfrac{1}{f(a)}(f(x+a) - f(x-a))$**

c) **D'après la relation précèdente, on peut dire plus : que f' est continue en tant que différence de fonctions continue, mais aussi que f' est dérivable avec $f''(x) = \dfrac{1}{f(a)}(f'(x+a) - f'(x-a))$ continue, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$.**

3) **Il suffit de dériver par rapport à x, avec y fixé et utiliser la relation (??), puis dériver par rapport à y avec x fixe.**

4) **En dérivant une autre fois par rapport x la 1ère relation de la question 3, on obtient et la 2ème par rapport à y, on obtient $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) = f(x)f''(y)$, pour $y = a$ on a : $f''(x)f(a) = f(x)f''(a)$, or $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$, d'où $f''(x) + \lambda f(x) = 0$, ainsi f et solution de l'équation $z'' + \lambda z = 0$.**

5) **$(\mathcal{E}_\lambda)$ est une équation différentielle homogène du 2ème ordre à coéfficients constants, dont l'ensemble de solution est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 + \lambda = 0$, de descriminant $\Delta = -4\lambda$.**

a) i. **Si $\lambda > 0$, alors $\Delta < 0$, les solution de l'équation caractéristique sont $r_1 = i\mu$ et $r_2 = -i\mu$ donc la solution générale $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $z(x) = A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$. Ainsi la base de l'ensemble de solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$ est $\{x \mapsto \sin(\mu x), x \mapsto \cos(\mu x)\}$.**

ii. f **est une solution de** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **avec** $f(0)=0$**, donc** $f(x)=A\sin(\mu x)+B\cos(\mu x)$ **avec** $B=0$.
Prenons $y=0$ **dans la 2ème relation de la question 3, donc** $f(x)f'(0)=2f(x)$ **avec** f **non nulle, donc** $f'(0)=2=A\mu$**, d'où** $A=\dfrac{2}{\mu}$.

b) **i. Si** $\lambda<0$**, alors** $\Delta>0$**, les solution de l'équation caractéristique sont** $r_1=\mu$ **et** $r_2=-\mu$ **donc la solution générale** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **est** $z(x)=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}=A(\cosh(\mu x)+\sinh(\mu x))+B(\cosh(\mu x)-\sinh(\mu x))=A'\sinh(\mu x)+B'\cosh(\mu x)$. **Ainsi la base de l'ensemble de solution de** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **est** $\{x\mapsto\sinh(\mu x),x\mapsto\cosh(\mu x)\}$.

ii. f **est une solution de** $(\mathcal{E}_\lambda)$ **avec** $f(0)=0$**, donc** $f(x)=A'\sinh(\mu x)+B'\cos(\mu x)$ **avec** $B'=0$.
Prenons $y=0$ **dans la 2ème relation de la question 3, donc** $f(x)f'(0)=2f(x)$ **avec** f **non nulle, donc** $f'(0)=2=A'\mu$**, d'où** $A'=\dfrac{2}{\mu}$.

c) Si $\lambda=0$, $f''=0$**, donc** $f(x)=Ax+B$**, or** $f(0)=0$ **et** $f'(0)=2$**, donc** $f(x)=x$.

d) Application.
1èr cas : $f(x)=\dfrac{2\sin(\mu x)}{\mu}$**, alors** $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt=\left[\frac{-2\cos(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y}=-2\frac{\cos(\mu x+\mu y)-\cos(\mu x-\mu y)}{\mu^2}=\frac{4\sin(\mu x)\sin(\mu y}{\mu^2}=f(x)f(y)$.
2ème cas : $f(x)=\dfrac{2\sinh(\mu x)}{\mu}$**, alors** $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt=\left[\frac{2\cosh(\mu t)}{\mu^2}\right]_{x-y}^{x+y}=2\frac{\cosh(\mu x+\mu y)-\cosh(\mu x-\mu y)}{\mu^2}=\frac{4\sinh(\mu x)\sinh(\mu y}{\mu^2}=f(x)f(y)$.
3ème cas : $f(x)=2x$**, alors** $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt=\left[t^2\right]_{x-y}^{x+y}=(x+y)^2-(x-y)^2=4xy=f(x)f(y)$.

III. Étude d'une fonction

1) Si $0<x<1$**, alors** $0<x^2<1$ **; et si** $x>1$**, alors** $x^2>1$.

2) Soit F **une primitive de** $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$. F **est définie sur** $]0,1[\cup]1,+\infty[$**, or** $f(x)=F(x^2)-F(x)$ **avec ni 0 ni 1 n'est compris entre** x **et** x^2 **quand** $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ **(sinon la fonction** $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ **ne serait pas définie), d'où** $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$.

3) $f(x)=F(x^2)-F(x)$ **est dérivable sur** D_f**, en tant que différence de composées de fonctions dérivables, avec** $f'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\dfrac{2x}{\ln(x^2)}-\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{x-1}{\ln x}$.

4) a) Au voisinage de 0, on a $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$**, posons** $u=x-1$**, donc**
$\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)$.

b) $\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1}{\ln(1+u)}=\dfrac{1}{u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)}=\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{1}{1-\frac{u}{2}+o(u)}\right)=\dfrac{1}{u}\left(1+\dfrac{u}{2}+o(u)\right)=\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{2}+o(1)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}+o(1)$

c) Du développement limité précédent, on déduit que $f'(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}=1+\dfrac{x-1}{2}+(x-1)o(1)\longrightarrow 1$ **quand** $x\longrightarrow 1$**, et que** $\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{2}+o(1)\longrightarrow\dfrac{1}{2}$ **quand** $x\longrightarrow 1$

5) Étude de f **au voisinage de 1.**

a) On a $\displaystyle\lim_1\left|\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right|=1<\frac{3}{2}$**, donc** $\left|\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right|\leq\dfrac{3}{2}$ **au voisinage de 1, donc sur un intervalle de la forme** $]1-\alpha,1+\alpha[\setminus\{1\}$.

b) **Supposons par exemple,** $1 < x \leq x^2$**, en intégrant l'inégalité précédente entre** x **et** x^2**, on obtient :** $\left|\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{3}{2}(x^2-x)$**, or** $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **et** $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = [\ln(t-1)]_x^{x^2} = \ln(1-x^2) - \ln(1+x) = \ln \frac{1-x^2}{1-x} = \ln(1+x)$**, d'où** $|f(x) - \ln(1+x)| \leq \frac{3}{2}(x^2-x)$**.**
Si $x \leq x^2 < 1$**, utiliser** $\int_x^{x^2} = -\int_{x^2}^{x}$**.**
On en déduit enfin que $\lim_1 f(x) = \ln 2$**.**

c) **D'après le théorème du prolongement de la dérivée, on a** f **continue en 1, dérivable au voisinage de 1, et dont la dérivée admet une limite finie (égale à 1) en 1, donc** f **est dérivable en 1, avec** $f'(1) = 1$**.**

6) **Étude de** f **au voisinage de 0.**

a) **Si** $x \in]0, 1[$**, alors** $x \geq x^2$ **et** $\frac{1}{\ln t} \leq 0$**, donc** $f(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \geq 0$**. D'autre part :**
$x^2 \leq t \leq x \Longrightarrow 2\ln x \leq \ln t \leq \ln x \Longrightarrow -\frac{1}{2\ln x} \leq -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{1}{\ln x} \Longrightarrow f(x) \leq -\frac{x-x^2}{\ln x} \longrightarrow 0$**, quand** $x \longrightarrow 0$**, d'où** f **est prolongeable par continuité en 0, en posant** $f(0) = 0$**.**

b) **On a aussi** $0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln x} \longrightarrow 0$ **quand** $x \longrightarrow 0$**, donc** f **est dérivable en 0 avec** $f'(0) = 0$**.**

7) **Étude de** f **au voisinage de** $+\infty$**.**
Si $x \in]1, +\infty[$**, alors** $x \leq x^2$ **et donc** $x \leq t \leq x^2 \Longrightarrow \ln x \leq \ln t \leq 2\ln x \Longrightarrow \frac{1}{2\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x} \Longrightarrow \frac{x^2-x}{2\ln x} \leq f(x) \leq \frac{x^2-x}{\ln x} \Longrightarrow \frac{x-1}{2\ln x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x-1}{\ln x}$**, d'où** $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$**, ainsi la courbe représentative de** f **présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des** y**.**

8) **On a** $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x} \geq 0$ **car** $x-1$ **et** $\ln x$ **sont toujours de mêmes signes, donc** f **est croissante.**

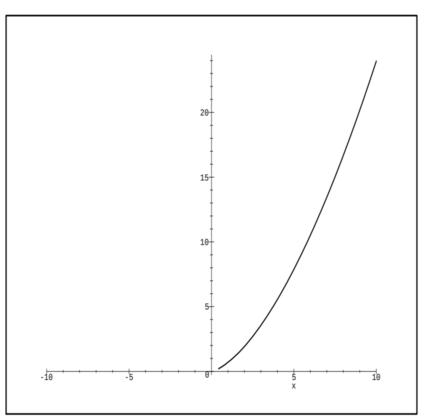
9) **On a** $f''(x) = \frac{x\ln x - x + 1}{x\ln^2 x}$ **est de même signe que** $g(x) = x\ln x - x + 1$**, avec** $g'(x) = \ln x$**, d'où le tableau de variation suivant :**

x	0	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$
f''	$+$		$+$

Ainsi f'' 0 **sauf au un point 1, d'où** f' **est strictement croissante (i.e :** f **est convexe).**

10) **Traçons la courbe à l'aide de Maple.**

```
> plot(int(1/(ln(t)),t=x..x^2),x,color=black,style=line,thickness=3);
```



11) Calcul d'une intégrale.

a) **On a** $\lim\limits_{0} \dfrac{t-1}{\ln t} = 0$ **et** $\lim\limits_{1} \dfrac{t-1}{\ln t} = 1$**, donc la fonction** $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}$ **est prolongeable par continuité aux points 0 et 1, donc son intégrale sur** $]0,1[$ **converge.**

b) **Pour la 1ère égalité, il suffit de procèder au changement de variable** $u = t^2$**. Pour la deuxième, on a** $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_{x^2}^{y^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$**, en utilisant la relation de Chasles de la façon suivante :** $\displaystyle\int_{x}^{x^2} - \int_{y}^{y^2} = \int_{x}^{y} + \int_{y}^{x^2} + \int_{y^2}^{y} = \int_{x}^{y} - \int_{x^2}^{y^2}$**.**

Or $\displaystyle\int_{y^2}^{y} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{y} \frac{u}{\ln u}\,\mathrm{d}u = \int_{x}^{y} \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ **(la variable est muette).**

Donc $f(x) - f(y) = \displaystyle\int_{x}^{y} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

c) **On a** $\lim\limits_{0} f(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{1} f(y) = \ln 2$**, d'où** $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1-t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = -\ln 2$

Fin
à la prochaine