MPSI 1 **2002-2003**
CPGE Agadir

DS N°1

Corrigé

Probléme 1 :

1. $H \cap IR^{+*} \neq \emptyset \Leftrightarrow H \cap IR^{-*} \neq \emptyset$ **car** H **groupe** .
2. a **existe car** $H \neq \{0\} \Rightarrow H \cap IR^{+*} \neq \emptyset$ **ou** $H \cap IR^{-*} \neq \emptyset \Rightarrow H \cap IR^{+*} \neq \emptyset$).
3.
   a.
      i. **Utiliser la proprietr caracteristique de la borne inf en mentionnant que le nombre d'elements de** H **vertifiant cette propriete est infini en particulier contient deux elemnts**.
      ii. **On faisant la difference des deux égalités on obtient** : $-\varepsilon < x - y < \varepsilon$ **d'où** $|x - y| \in H \cap IR^{+*}$, $\varepsilon = a$ **donne une contradiction**.
   b. **car** $a \in H$ **et** H **sous-groupe de** $(IR, +)$.
   c. **Cours**: $\exists!(q, r) \in Zx[0, a[$ **tel que** : $x = aq + r$.
   d. $\exists!(q, r) \in Zx[0, a[$ **tel que** : $r = x - aq \in H$, **si** $r \neq 0$ **on aurait** $r \in H \cap IR^{+*}$ **et** $r < a = \inf(H \cap IR^{+*})$ **Absurde**
4. .
   a. **Cours**.
   b. **Utiliser la propriete caracteristique de la borne inferieure pour** $\varepsilon = y - x$.
   c. **Facile**.
5. **Applications** :
   a. **Comme** $Z\left(\sqrt{2}\right)$ **est un groupe si** $Z\left(\sqrt{2}\right) = aZ$ **alors** $1 = ap$ **et** $\sqrt{2} = aq$ **d'où** $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in Q$ **Absurde**.
   b. **Car** $Z(\pi)$ **est dense et cos et sin sont croissantes ou decroissantes sur des intervalles petits ne contenant pas 0**.
   c. $H = +e^{aZ}$ **car** H **sous-groupe de** $(IR^{*}, x) \Leftrightarrow \ln(|H|)$ **sous-groupe de** $(IR, +)$

Exercice :

Vu en TD