

DS N°1

Corrigé

Problème 1 :

-
1. $H \cap \mathbb{R}^{++} \neq \emptyset \Leftrightarrow H \cap \mathbb{R}^{-*} \neq \emptyset$ car H groupe .
 2. a existe car $H \neq \{0\} \Rightarrow H \cap \mathbb{R}^{++} \neq \emptyset$ ou $H \cap \mathbb{R}^{-*} \neq \emptyset \Rightarrow H \cap \mathbb{R}^{++} \neq \emptyset$.
 3.
 - a.
 - i. Utiliser la propriété caractéristique de la borne inf en mentionnant que le nombre d'éléments de H vérifiant cette propriété est infini en particulier contient deux éléments.
 - ii. On faisant la différence des deux égalités on obtient : $-\varepsilon < x - y < \varepsilon$ d'où $|x - y| \in H \cap \mathbb{R}^{++}$, $\varepsilon = a$ donne une contradiction.
 - b. car $a \in H$ et H sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
 - c. Cours: $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}x[0, a[$ tel que : $x = aq + r$.
 - d. $\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}x[0, a[$ tel que : $r = x - aq \in H$, si $r \neq 0$ on aurait $r \in H \cap \mathbb{R}^{++}$ et $r < a = \inf(H \cap \mathbb{R}^{++})$ Absurde
 4. .
 - a. Cours.
 - b. Utiliser la propriété caractéristique de la borne inférieure pour $\varepsilon = y - x$.
 - c. Facile.
 5. Applications :
 - a. Comme $\mathbb{Z}(\sqrt{2})$ est un groupe si $\mathbb{Z}(\sqrt{2}) = a\mathbb{Z}$ alors $1 = ap$ et $\sqrt{2} = aq$ d'où $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ Absurde.
 - b. Car $\mathbb{Z}(\pi)$ est dense et cos et sin sont croissantes ou décroissantes sur des intervalles petits ne contenant pas 0.
 - c. $H = +e^{a\mathbb{Z}}$ car H sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \cdot) \Leftrightarrow \ln(H)$ sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

Exercice :