CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle 08-09: *Géomètrie, coniques Nombres réels*

Lundi 26 Janvier 2009

Durée : 2heures

Citation du jour :
Moi tout le monde me connaît parcequ'ils me comprennent, toi tout le monde te connaît parceque personne ne te comprend.
Charlie Chaplin à Einstein

Personnalité du jour *Charlie Chaplin*
Charlie Chaplin (1889-1977), de son vrai nom Sir Charles Spencer Chaplin, Jr., est un acteur, réalisateur, producteur, scénariste et compositeur britannique.
Son personnage *Charlot* (le vagabond), apparaît pour la première fois en 1914. C'est un sans domicile fixe qui a des manières raffinées et dignes d'un gentleman coiffé d'un chapeau melon, vêtu d'une veste étriquée ainsi que d'un pantalon tombant sur des chaussures trop grandes et portant une canne souple de bambou. Cette allure lui vaudra la réputation de « vagabond » misérable et roué, associal et obstiné, révolté et sentimental

Exercice 1

1) a) **Si** A **est majorée par** $\sup A$ **et** B **par** $\sup B$**, alors** $A \cup B$ **est majorée par** $\max(\sup A, \sup B)$**, en particulier** $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$**. Inversement si** $A \cup B$ **est majorée par** $\sup(A \cup B)$**, alors** A **et** B **sont aussi majorées par** $\sup(A \cup B)$**, puisque sont incluses dans** $A \cup B$**, en particulier** $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$**, d'où l'égalité.**

   b) **voir ce qui précède.**

2) a) $A \cap B \subset A$**, donc** $A \cap B$ **est majorée par** $\sup A$**, mais aussi par** $\sup B$**, donc finalement par** $\min(\sup A, \sup B)$**, d'où admet une borne supérieure avec** $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$**.**

   b) **Oui, prendre par exemple** $A = \{1, 2\}$ **et** $B = \{2, 3\}$**.**

3) a) **Si** A **est majorée par** $\sup A$ **et** B **par** $\sup B$**, alors** $A + B$ **est majorée par** $\sup(A + B)$ **donc admet une borne supérieure, vérifiant** $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$**. Inversement si** $A + B$ **est majorée par** $\sup(A + B)$**, alors** $\forall a \in A, \forall b \in B$**, on a** $a + b \leq \sup(A + B)$**, donc** $a \leq \sup(A + B) - b$**, ainsi** A **est**

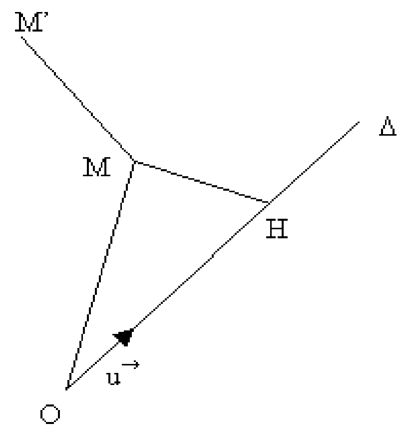
majorée par $\sup(A+B)-b$**, d'où** $\sup A \leq \sup(A+B)-b$**, mais aussi** $b \leq \sup(A+B)-\sup A$ $\forall b \in B$**, donc** B **est majorée par** $\sup(B) \leq \sup(A+B)-\sup A$**, d'où** $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$**.**

b) Des inégalités précèdentes, on déduit l'égalité $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$**.**

Exercice 2.

1) M **point invariant par** $f \Longleftrightarrow f(M) = M \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM} = 0 \Longleftrightarrow M \in \Delta = D(O, \overrightarrow{u})$**, la droite passant par** 0 **et dirigée par** $\overrightarrow{u}$**.**

2) a) **De la relation** $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}$**, on déduit que** $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM}$**, donc** $\overrightarrow{M'M} \perp \overrightarrow{u}$ **et** $\overrightarrow{M'M} \perp \overrightarrow{OM}$**, donc** (MM') **est perpendiculaire au plan passant par le point** M **et la droite** Δ**, voir figure ci-contre :**



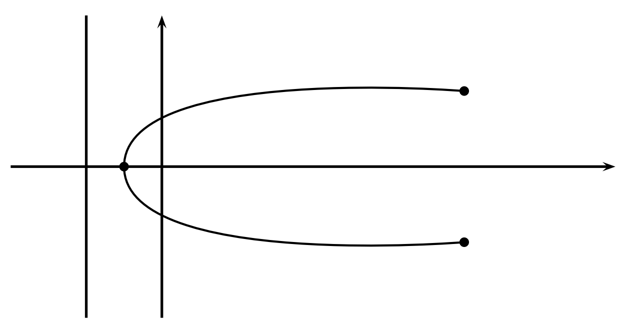
b) **Soit** H **la projection orthogonale de** M **sur la droite** Δ**, donc** $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{HM}$ **car** $\overrightarrow{u} \,//\, \overrightarrow{OM}$**, or** $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{HM}$**, donc** $MM' = \|\overrightarrow{u}\|.HM$ **avec** $HM = d(M, \Delta)$**.**

Exercice 1.

1) **.**

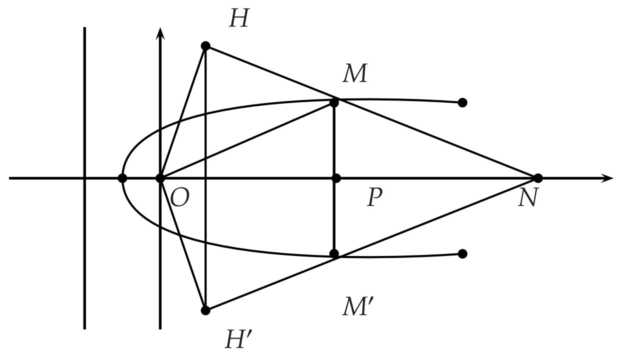
a) $r(\theta) = \dfrac{p}{1 - e\cos(\theta - \theta_0)}$**, c'est l'équation polaire d'une conique de foyer** F **l'origine, d'exentricité** $e = 1$ **et de paramètre** $p = ed = 1$ **où** $d = d(F, D)$ **et** D **sa directrice, ici** $d = 1$ **; et enfin** $\theta_0 = \pi$ **l'angle orienté** $\widehat{\overrightarrow{i}, FH}$**, donc la directrice est d'équation** $x = -1$ **et l'éqaution cartésienne de la parabole est** $y = 4(x + \frac{1}{2})^2$**.**

b) **On a la figure suivante :**



directrice d'équation $x = -1$

2) **Dans la figure ci-dessous, il est clair que l'axe** (ox) **est un axe de symétrie, en effet** M' **le symétrique de** M **par rapport à l'axe** (ox)**,** M **et** M' **ont la même projection orthogonale** P **sur** (ox)**, donc le même point associé** P **et par suite les droites** (MN) **et** $(M'N)$ **sont symétriques par rapport à l'axe** (ox)**, il en sera de même pour les points** H **et** H'**.**



3) a) **Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ dirige la normale à la droite (MN), posons $\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OH}}=\varphi$; donc l'équation normale de la droite (MN) est de la forme $x\cos\varphi+y\sin\varphi=p(\varphi)$ où $p(\varphi)=\overline{OH}$. On cherche maintenant à exprimer φ en fonction de $\theta=\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OM}}$. D'autre part, par raison de symétrie le triangle (ONP) est isocèle en P, donc $\widehat{\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NM}}=\theta$, en plus le triangle (ONH) est rectangle en H, d'où $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$.**

b) **Le triangle (OMH) est rectangle en H, avec $\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OH}}=\varphi-\theta=2\varphi-\dfrac{\pi}{2}$ et $OM=\rho(\theta), OH=r(\varphi)$, d'où $r(\varphi)=\rho(\theta)\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin 2\varphi}{1-\cos\theta}=\dfrac{\sin 2\varphi}{1-\sin\varphi}$**

c) **Comme Γ est symétrique par rapport à l'axe (ox), alors $r(\varphi)=r(-\varphi)=\dfrac{-\sin 2\varphi}{1-\sin\varphi}$.**

4) **.**

En Maple©, les calculs donnent :

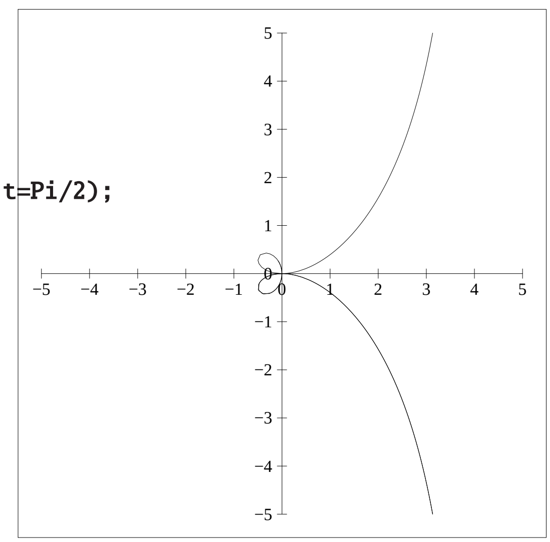
```
> limit(sin(2*t)/(1-sin(t)),t=Pi/2);
```

undefined

```
> limit(sin(t-Pi/2)*sin(2*t)/(1-sin(t)),t=Pi/2);
```

-4

Donc Γ admet comme asymptote la droite d'équation $y=-4$ dans le repère $(O,\overrightarrow{u_{\varphi_0}},\overrightarrow{v_{\varphi_0}})$ avec ici $\varphi_0=\dfrac{\pi}{2}$ où dans le cas général $\overrightarrow{u_\varphi}=\cos\varphi\overrightarrow{i}+\sin\varphi\overrightarrow{j}$ // OH et $\overrightarrow{v_\varphi}=-\sin\varphi\overrightarrow{i}+\cos\varphi\overrightarrow{j}\perp OH$, ainsi dans le repère canonique $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ l'asymptote est d'équation $x=4$. la figure est la suivante :



5) **La tangente à Γ en un point régulier H est dirigée par la vitesse $\overrightarrow{V}=r'(\varphi)\overrightarrow{u_\varphi}+r(\varphi)\overrightarrow{v_\varphi}$, donc la tangente est perpendiculaire à (OH) quand $r'(\varphi)=0$**

Exercice 2 :

1) **La matrice associée à la conique est $A=\begin{pmatrix}1&-k\\-k&1\end{pmatrix}$ de déterminant égal à $1-k^2$, on discute ici 3 cas :**

a) **Si $k=\pm1$, donc $\det A=0$, il s'agit alors d'une parabole.**

b) **Si $-1<k<1$, donc $\det A>0$, il s'agit alors d'une ellipse.**

c) **Sinon, donc $\det A<0$, il s'agit alors d'une hyperbole.**

2) C_k **est d'équation** $f(x,y)=0$ **où** $f(x,y)=x^2+y^2-2kxy+2kx-2y=0$**, son centre** $\Omega(x,y)$ **(quand il existe, donc** $k\neq\pm1$**) doit satisfaire les équations :** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$**, d'où le système d'équations** $\begin{cases} x-ky=-k \\ y-kx=1 \end{cases}$ **, de solution** $\Omega(0,1)$**.**

3) **Dans le nouveau repère les coordonnés sont** $\begin{cases} x_1=x \\ y_1=y-1 \end{cases}$ **. L'équation de la conique dans ce repère après simplification sera :** $0=x_1^2+(y_1+1)^2-2kx_1(y_1+1)+2kx_1-2(y_1+1)=x_1^2+y_1^2-2kx_1y_1-1$**.**

4) **Posons le changement de variables :** $\begin{cases} x_1=x_2\cos\alpha-y_2\sin\alpha \\ y_1=x_2\sin\alpha+y_2\cos\alpha \end{cases}$ **. L'équation de** C_k **dans ce nouveau repère devient :** $0=(x_2\cos\alpha-y_2\sin\alpha)^2+(x_2\sin\alpha+y_2\cos\alpha)^2-2k(x_2\cos\alpha-y_2\sin\alpha)(x_2\sin\alpha+y_2\cos\alpha)-1=(1-2k\cos\alpha\sin\alpha)x_2^2+(1+2k\cos\alpha\sin\alpha)y_2^2-2k(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)x_2y_2-1$**, l'équation est réduite quand le coéfficient** $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ **est nul, donc** $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$**.**

5) **L'équation réduite dans ce dernier repère devient :** $(1-k)x_2^2+(1+k)y_2^2=1$**. On distingue 4 cas :**

- **a)** $1-k>0$ **et** $1+k>0$**, i.e.** $-1<k<1$**, il s'agit d'une ellipse d'équation réduite** $\dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$ **où** $a=\sqrt{1-k}$ **et** $b=\sqrt{1+k}$**.**
- **b)** $1-k<0$ **et** $1+k>0$**, i.e.** $k>1$**, il s'agit d'une hyerbole d'équation réduite** $\dfrac{y_2^2}{b^2}-\dfrac{x_2^2}{a^2}=1$ **où** $a=\sqrt{k-1}$ **et** $b=\sqrt{1+k}$**.**
- **c)** $1-k>0$ **et** $1+k<0$**, i.e.** $k<-1$**, il s'agit d'une hyerbole d'équation réduite** $\dfrac{x_2^2}{a^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1$ **où** $a=\sqrt{1-k}$ **et** $b=\sqrt{-1-k}$**.**
- **d)** $1-k<0$ **et** $1+k<0$ **est un cas impossible.**

Fin
à la prochaine