High Tech Prépas, Rabat

Devoir Libre: *Nombres réels*

7 février 2010

Blague du jour :
• Si les cons étaient des fleurs, le bureau du prof de maths serait un jardin...
• Qu'est-ce qu'un bon professeur ? Un bon professeur c'est un prof qui est souvent absent.
• L'inspecteur demande un professeur : "Pouvez-vous me donner 2 raisons qui vous motivent à devenir professeur ?", juillet et août, lui répondit.
• Un professeur de médecine à ses étudiants : Qui provoque la transpiration ?
votre cours, monsieur ; lui répondent.

Mathématicien du jour **Hölder**

Otto Ludwig Hölder (1859-1937) est un mathématicien allemand . On le connaît notamment pour : l'inégalité de Hölder ; le théorème de Jordan-Hölder ; le théorème de Hölder ; la moyenne de Hölder ; la condition de Hölder. Ses travaux portaient beaucoup sur les séries de Fourier, la théorie des groupes, la théorie de Galois

Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Définition : Un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ est une partie H de $\mathbb{R}$ vérifiant : $0 \in H$ et $\forall (x, y) \in H^2$ on a : $x - y \in H$.
On se propose dans ce problème de chercher la forme générale des sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$. Dans tout le probléme H désigne un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit $\{0\}$ et $a = \inf(H \cap \mathbb{R}^{+*})$.

1) Montrer que : $H \cap \mathbb{R}^{-*} \neq \emptyset \iff H \cap \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$.

2) En déduire que a existe.

3) On suppose dans cette question que : $a \neq 0$, et on veut montrer que $H = a\mathbb{Z}$.

- a) On suppose que : $a \notin H$.
  - i. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que : $\exists (x, y) \in H^2$ tel que : $x \neq y$ et vérifiant : $(a < x < a + \varepsilon$ et $a < y < a + \varepsilon)$.
  - ii. En choisissant ε convenable tirer une contradiction.
- b) En déduire que : $a\mathbb{Z} \subset H$.
- c) Énoncez le théorème de la division euclidienne sur $\mathbb{R}$.
- d) Soit $x \in H$, utiliser la question précèdente pour montrer que : $\exists q \in Z$ tel que : $x = aq$, conclure que : $H = aZ$.

4) On suppose dans cette question que : $a = 0$ et on veut démontrer que : H est dense dans $\mathbb{R}$.

- a) Rappeler la définition d'une partie dense dans $\mathbb{R}$.
- b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $x < y$, montrer que : $\exists b \in H$ tel que : $0 < b < y - x$.
- c) En déduire que : $x < E\left(\frac{y}{b}\right) b < y$. Conclure.

5) Applications :

- a) Montrer que : $\mathbb{Z}\left(\sqrt{2}\right) = \{a + b\pi$ tel que : $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ est une sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, puis en déduire qu'il est dense dans $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que les suites $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont denses dans $[-1, 1]$. En déduire que ces suites ne peuvent pas converger.