Variations sur la fonction Partie Entière

Rappels et notations

Les définitions, notations et propriétés ci-dessous sont rappelées à toutes fins utiles, et aucune démonstration n'est demandée. Dans ces notations, x est un réel quelconque. Sauf indication contraire, tous les entiers considérés dans ce problème sont des entiers *relatifs*.

– On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x (ou encore l'entier "plancher" de x).
  C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
  Il est donc caractérisé par $\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$, c'est-à-dire par $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x$.

– On note $\lceil x \rceil$ l'entier "plafond" de x.
  C'est le plus petit entier supérieur ou égal à x.
  Il est donc caractérisé par $\lceil x \rceil - 1 < x \le \lceil x \rceil$, c'est-à-dire par $x \le \lceil x \rceil < x + 1$.

– Il est clair que les applications $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto \lceil x \rceil$ sont croissantes au sens large.

– Pour tout entier p, on a $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = p \Leftrightarrow x \in \ [p, p+1[\\ \lceil x \rceil = p \Leftrightarrow x \in \ ]p-1, p] \end{cases}$ et $\begin{cases} \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p \\ \lceil x + p \rceil = \lceil x \rceil + p \end{cases}$

Énoncé du problème

1. Pour tout réel x, vérifier que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ et que $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.
2. Soit x un réel et p un entier. Montrer les équivalences suivantes :
   $$\begin{cases} x \le p \Leftrightarrow \lceil x \rceil \le p \\ x < p \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \le p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p \le x \Leftrightarrow p \le \lfloor x \rfloor \\ p < x \Leftrightarrow p \le \lceil x \rceil - 1 \end{cases}$$
3. On note $\mathrm{N}(I)$ le nombre d'entiers distincts appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$.
   Soit x et y des réels, avec $x < y$. Calculer $\mathrm{N}(I)$ dans les cas suivants :
   $I =]x, y[, \quad I = [x, y[, \quad I =]x, y], \quad I = [x, y].$
   On exprimera les réponses en fonction d'un ou plusieurs des entiers $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor, \lceil x \rceil, \lceil y \rceil$.
4. (a) Soit x un réel, et k, n deux entiers ($n > 0$). Prouver que $\left\lfloor \dfrac{x+k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor$.
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue et croissante (au sens large) sur $\mathbb{R}$, et telle qu'on ait toujours l'implication $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, on a $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$
   (b) Montrer que pour tout réel x, on a $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.
   On appréciera une démonstration qui ne serait trop proche de celle de 5.a...
   (c) Retrouver ainsi les résultats des questions 4a et 4b.
6. Soit n un entier strictement positif.
   On se propose de calculer les sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.
   (a) On suppose tout d'abord qu'il existe m dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n = m^2$.
   En utilisant une partition de $[1, \ldots, n]$, montrer que $S_n = \dfrac{(m+1)(4m^2 - m)}{6}$.

(b) Montrer que dans le cas général, $S_n = \dfrac{(m+1)(6n-2m^2-m)}{6}$, avec $m = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

(c) Avec ces notations, en déduire que $T_n = \dfrac{m(6n+5-2m^2-3m)}{6}$

7. Dans cette question, x est un réel, m est dans $\mathbb{Z}$ et n est dans $\mathbb{N}^*$.

   On se propose de calculer la somme $U(m,n,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor$.

   (a) On commence par supposer $m = 1$. Montrer que $U(1,n,x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

   Indication : commencer par examiner le cas où x est dans $\mathbb{Z}$, puis généraliser.

   (b) On suppose maintenant que les entiers m et n sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autre diviseur positif autre que 1.)

   Pour tout k de $\{0,\ldots,n-1\}$ on note $f(k)$ le reste dans la division de km par n.

   i. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{x+km}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{x+f(k)}{n} \right\rfloor + \dfrac{km}{n} - \dfrac{f(k)}{n}$.

   ii. Montrer que f est une bijection de $\{0,\ldots,n-1\}$ sur lui-même.

   iii. En déduire que $U(m,n,x) = \lfloor x \rfloor + \dfrac{(m-1)(n-1)}{2}$

   (c) On suppose enfin que les entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont quelconques.

   On note d le pgcd de m er de n (leur plus grand diviseur commun.)

   Il existe donc deux entiers $m' \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$.

   On sait enfin que m' et n' sont premiers entre eux.

   i. En notant $k = n'q + k'$ la division de k par n', montrer que :

   $$U(m,n,x) = \sum_{q=0}^{d-1}\sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x+(n'q+k')m}{n} \right\rfloor = \sum_{q=0}^{d-1} \left(qm'n' + \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x+k'm}{n} \right\rfloor \right)$$

   ii. En déduire $U(m,n,x) = m'n'\,\dfrac{d(d-1)}{2} + d\,U\Big(m', n', \dfrac{x}{d}\Big)$.

   iii. Conclure finalement, avec $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $d = \mathrm{pgcd}(m,n)$:

   $$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor = d\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{mn-m-n+d}{2}.$$

   Remarque

   Par symétrie, le résultat précédent prouve que pour tout réel x et pour tous entiers m,n strictement positifs, on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+kn}{m} \right\rfloor$.