

Variations sur la fonction Partie Entière

RAPPELS ET NOTATIONS

Les définitions, notations et propriétés ci-dessous sont rappelées à toutes fins utiles, et aucune démonstration n'est demandée. Dans ces notations, x est un réel quelconque. Sauf indication contraire, tous les entiers considérés dans ce problème sont des entiers *relatifs*.

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x (ou encore l'entier "plancher" de x).
C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x .
Il est donc caractérisé par $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, c'est-à-dire par $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
- On note $\lceil x \rceil$ l'entier "plafond" de x .
C'est le plus petit entier supérieur ou égal à x .
Il est donc caractérisé par $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$, c'est-à-dire par $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
- Il est clair que les applications $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto \lceil x \rceil$ sont croissantes au sens large.
- Pour tout entier p , on a $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = p \Leftrightarrow x \in [p, p + 1[\\ \lceil x \rceil = p \Leftrightarrow x \in]p - 1, p] \end{cases}$ et $\begin{cases} \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p \\ \lceil x + p \rceil = \lceil x \rceil + p \end{cases}$

ÉNONCÉ DU PROBLÈME

1. Pour tout réel x , vérifier que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ et que $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.
2. Soit x un réel et p un entier. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x \leq p \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \leq p \\ x < p \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 1 \leq p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p \leq x \Leftrightarrow p \leq \lceil x \rceil \\ p < x \Leftrightarrow p \leq \lceil x \rceil - 1 \end{cases}$$
3. On note $N(I)$ le nombre d'entiers distincts appartenant à un intervalle I de \mathbb{R} .
Soit x et y des réels, avec $x < y$. Calculer $N(I)$ dans les cas suivants :
 $I =]x, y[, \quad I = [x, y[, \quad I =]x, y], \quad I = [x, y]$.
On exprimera les réponses en fonction d'un ou plusieurs des entiers $\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor, \lceil x \rceil, \lceil y \rceil$.
4. (a) Soit x un réel, et k, n deux entiers ($n > 0$). Prouver que $\left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + k}{n} \right\rfloor$.
(b) Montrer que $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$.
5. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application continue et croissante (au sens large) sur \mathbb{R} , et telle qu'on ait toujours l'implication $f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Montrer que pour tout réel x , on a $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$
 - (b) Montrer que pour tout réel x , on a $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.
 On appréciera une démonstration qui ne serait trop proche de celle de 5.a...
 - (c) Retrouver ainsi les résultats des questions 4a et 4b.
6. Soit n un entier strictement positif.
On se propose de calculer les sommes $S_n = \sum_{k=1}^n \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \left\lceil \sqrt{k} \right\rceil$.
 - (a) On suppose tout d'abord qu'il existe m dans \mathbb{N}^* tel que $n = m^2$.
En utilisant une partition de $[1, \dots, n]$, montrer que $S_n = \frac{(m+1)(4m^2 - m)}{6}$.

(b) Montrer que dans le cas général, $S_n = \frac{(m+1)(6n-2m^2-m)}{6}$, avec $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

(c) Avec ces notations, en déduire que $T_n = \frac{m(6n+5-2m^2-3m)}{6}$

7. Dans cette question, x est un réel, m est dans \mathbb{Z} et n est dans \mathbb{N}^* .

On se propose de calculer la somme $U(m, n, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor$.

(a) On commence par supposer $m = 1$. Montrer que $U(1, n, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Indication : commencer par examiner le cas où x est dans \mathbb{Z} , puis généraliser.

(b) On suppose maintenant que les entiers m et n sont premiers entre eux (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas d'autre diviseur positif autre que 1.)

Pour tout k de $\{0, \dots, n-1\}$ on note $f(k)$ le reste dans la division de km par n .

i. Montrer que $\left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+f(k)}{n} \right\rfloor + \frac{km}{n} - \frac{f(k)}{n}$.

ii. Montrer que f est une bijection de $\{0, \dots, n-1\}$ sur lui-même.

iii. En déduire que $U(m, n, x) = \lfloor x \rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2}$

(c) On suppose enfin que les entiers $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont quelconques.

On note d le pgcd de m et n (leur plus grand diviseur commun.)

Il existe donc deux entiers $m' \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} m = dm' \\ n = dn' \end{cases}$.

On sait enfin que m' et n' sont premiers entre eux.

i. En notant $k = n'q + k'$ la division de k par n' , montrer que :

$$U(m, n, x) = \sum_{q=0}^{d-1} \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x + (n'q + k')m}{n} \right\rfloor = \sum_{q=0}^{d-1} \left(qm'n' + \sum_{k'=0}^{n'-1} \left\lfloor \frac{x + k'm}{n} \right\rfloor \right)$$

ii. En déduire $U(m, n, x) = m'n' \frac{d(d-1)}{2} + dU\left(m', n', \frac{x}{d}\right)$.

iii. Conclure finalement, avec $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $d = \text{pgcd}(m, n)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor = d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{mn - m - n + d}{2}.$$

Remarque

Par symétrie, le résultat précédent prouve que pour tout réel x et pour tous entiers m, n strictement positifs, on a l'égalité : $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+km}{n} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{x+kn}{m} \right\rfloor$.