CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 5 (08-09): *Géomètrie euclidienne Nombres réels*

Lundi, le 2 Février 2009

Durée : 4heures

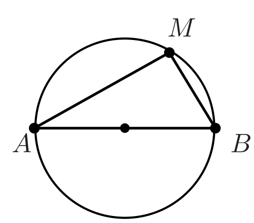
Citation du jour :
Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné !

Mathématicien du jour ***Torricelli***
Evangelista Torricelli (1608-1647) est un physicien et un mathématicien italien, mais aussi élève de Galillé.
Torricelli est connu pour avoir inventé le baromètre à tube de mercure qui porte son nom. Une unité de pression, le *torr*, lui est dédiée. Elle correspond à la pression d'un millimètre de mercure. Mais c'est le *pascal* qui fut retenu comme unité du système international en hommage à Blaise Pascal, qui poursuivit et développa les recherches dans ce domaine. Il est aussi vraiment l'inventeur du *diagramme horaire* : $(t, s(t)$ où $s(t)$ désigne l'abscisse curviligne à l'instant t. Il inventa aussi la notion d'enveloppe pour l'étude des mouvements en chute libre.
Tragique destin : Torricelli meurt à l'age de 39 ans à cause d'une typhoide.

PROBLÉME 1.

PARTIE 1

1) **Quand $\theta = 0$ les points A, B et M sont alignés, donc $\Gamma = (AB)$.**



2) **Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, le triangle (ABM) est rectangle en M, donc M appartient au cercle de diamètre $[A, B]$.**

3) **On sait que** $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = AM.BM.\sin\theta$ **et que** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = AM.BM.\cos\theta$**, d'où**

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})}{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}}$$

Posons $M = (x, y), A = (a, 0)$ **et** $B = (-a, 0)$**, l'équation précèdente devient** $\begin{vmatrix} x-a & x+a \\ y & y \end{vmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix} \tan\theta$, **qui donne :** $-2ay = (x^2 - a^2 + y^2)\tan\theta$, **on obtient finalement l'équation suivante :** $x^2 + y^2 + 2y\dfrac{a}{\tan\theta} = a^2$.

4) **L'équation précèdente de** Γ **s'écrit aussi** $x^2 + \left(y + \dfrac{a}{\tan\theta}\right)^2 = a^2\left(1 + \dfrac{1}{\tan^2\theta}\right) = \dfrac{a^2}{\cos^2\theta}$, **c'est l'équation du cercle de centre** $\Omega\left(0, -\dfrac{a}{\tan\theta}\right)$ **et de rayon** $\dfrac{a}{\cos\theta}$.
On remarque que $A(a,0), B(-a,0) \in \Gamma$ **car vérifient l'équation de** Γ.
Soit $M(x,y)$ **un point de la tangente à** Γ **au point** A, **donc** $AM \perp A\Omega$, **d'où** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{\Omega A} = 0$, **c'est à dire** $a(x-a) + a\dfrac{y}{\tan\theta} = 0$, **ce qui donne**

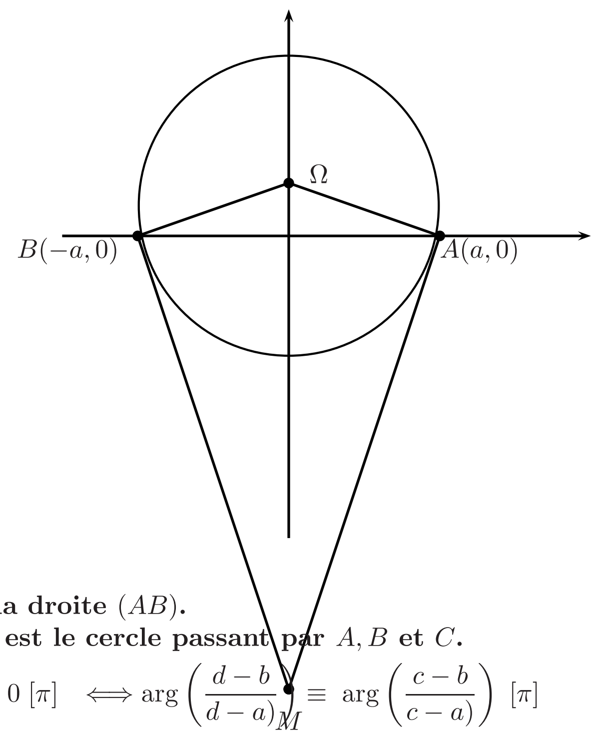
$$\Delta_A : x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos\theta$$

Pour l'équation de Γ **au point** B, **à l'aide d'un raisonnement analogue, on trouve :**

$$\Delta_B : x\cos\theta - y\sin\theta = -a\cos\theta$$

On remarque qu'elle est obtenue à partir de celle en A, **en remplaçant** θ **par** $-\theta$.
Δ_A **est dirigé par le vecteur de cordonnées** $(-\sin\theta, \cos\theta) = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, **qui fait un angle** $\theta + \frac{\pi}{2}$ **avec l'axe** $(ox) = (AB)$.
Pour construire le point Ω, **on procède comme suit :**

- **On trace la droite** (AB).
- **On trace la droite faisant un angle** $\theta + \frac{\pi}{2}$ **avec** (AB) **au point** A.
- **On trace la droite faisant un angle** $-\theta + \frac{\pi}{2}$ **avec** (AB) **au point** B.
- **On trace lesnormales à ces droites respectivement aux points** A **et** B.
- **Leur intersection n'est autre que le point** Ω.



PARTIE 2

1) **C'est une application directe de la partie 1 :**
   - **Si** $\theta = 0$, **alors** A, B, C **sont alignés et** $\mathcal{H}$ **est la droite** (AB).
   - **Si** $\theta \neq 0$, **alors** A, B, C **sont cocycliques et** $\mathcal{H}$ **est le cercle passant par** A, B **et** C.

2) $$\begin{aligned}\frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)} \in \mathbb{R}^* &\iff \arg\left(\frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)}\right) \equiv 0\ [\pi] \iff \arg\left(\frac{d-b}{d-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)\ [\pi] \\ &\iff \widehat{DA, DB} \equiv \widehat{CA, CB}\ [\pi] \iff D \in \mathcal{H} \\ &\iff A, B, C, D \text{ cocycliques ou alignés}\end{aligned}$$

PARTIE 3

1) $\dfrac{\left(-\frac{1}{\overline{z}} + 1\right)(z-1)}{\left(-\frac{1}{\overline{z}} - 1\right)(z+1)} = -\dfrac{(\overline{z}-1)(z-1)}{(\overline{z}+1)(z+1)} = -\dfrac{|z-1|^2}{|z+1|^2} \in \mathbb{R}$, **donc les points d'affixes** $1, -1, z$ **et** $-\dfrac{1}{\overline{z}}$ **sont cocycliques, puisque non alignés.**

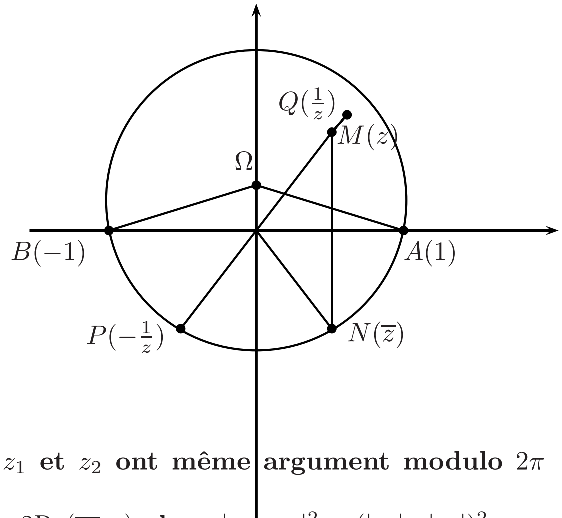
2) **Notos** $A(1), B(-1)$ **et** $M(z)$, **et** $\theta \equiv \widehat{AM, BM} \equiv \arg\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)\ [\pi]$, **d'après la partie 1, il s'agit du cercle passant par** A **et** B **et de centre** $\Omega(0, -\dfrac{1}{\tan\theta})$.

3) **Notons** $M(z = re^{i\alpha})$, **alors les points** $A, B, N(\overline{z} = re^{-i\alpha}), P\left(-\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{r}e^{i(\alpha+\pi)}\right)$ **sont cocycliques, avec** M **et** N **symétriques par rapport à l'axe** (ox) **et** O, M, P **alignés. La construction du point** $Q(\frac{1}{z})$ **sera la suivante :**

.

- **On construit le symétrique le point N symétrique de M par rapport à l'axe (ox).**
- **On dessine le cercle passant par les points A, B, N.**
- **On construit le point P, point d'intersection de ce cercle avec la droite (OM), verifiant $\widehat{OM, OP} = \pi$.**
- **On construit le point Q, symétrique du point P par rapport à l'origine.**

.



PARTIE 4

1) **Notons d'abord que deux complexes non nuls z_1 et z_2 ont même argument modulo 2π équivaut à $z_2 = \lambda z_1$ avec $\lambda > 0$.**
Pour $n = 2$, $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)$, donc $|z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \iff \overline{z_1}z_2 = |z_1 z_2| = |\overline{z_1}z_2| \iff \overline{z_1}z_2 = \lambda \in \mathbb{R}_+^* \iff z_2 = \mu z_1$ où $\mu = \dfrac{\lambda}{|z_1|^2} \iff \arg z_1 = \arg z_2$.
Supposons le résultat vrai pour n, et que $|z_1+\cdots+z_{n+1}| = |z_1|+\cdots+|z_{n+1}|$, donc $|z_1|+\ldots|z_n|+|z_{n+1}| = |z_1+\cdots+z_{n+1}| \leq |z_1+\cdots+z_n|+|z_{n+1}| \leq |z_1|+\ldots|z_n|+|z_{n+1}|$, d'où $|z_1+\cdots+z_n| = |z_1|+\ldots|z_n|$, donc les z_k sont proportionnels pour $k \in [\![1, n]\!]$, par exemple $z_k = \lambda_k z_1$ avec $\lambda_k > 0$ où $1 \leq k \leq n$. L'égalité $|z_1+\cdots+z_{n+1}| = |z_1|+\cdots+|z_{n+1}|$ devient alors $|\lambda z + z_{n+1}| = |\lambda z_1| + |z_{n+1}$ où $\lambda = \lambda_1+\cdots+\lambda_n > 0$, donc $z_{n+1} = \mu z_1$, avec $\mu > 0$.
Inversement, il est clair que si $z_k = \lambda_k z_1$ avec $\lambda_k > 0$, alors $|z_1+\cdots+z_{n+1}| = |z_1|+\cdots+|z_{n+1}|$.

2) a) **On a $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0$, donc $\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} = 0$, d'où $\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(z - z_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}}_{\text{nulle}}\, z - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} z_k = -\sum_{k=1}^{n} |z_k|$, car $\overline{\alpha_k} = \dfrac{\overline{z_k}}{|z_k|}$.**

b) **$\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(z - z_k) \in \mathbb{R}_-^*$, donc $\left|\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(z - z_k)\right| = -\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(z - z_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} z_k - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} z = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$,**
d'autre part $\left|\sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k}(z - z_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\overline{\alpha_k}(z - z_k)| = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$ car $|\alpha_k| = 1$.

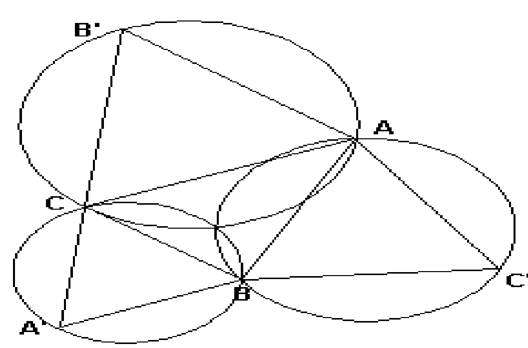
c) **D'après la question 1, partie 4 ; l'inégalité précèdente est une inégalité si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $\arg(z_k) \equiv \arg(z - z_k)$ $[2\pi]$ si et seulement si $\arg(-\overline{\alpha_k}(z - z_k)) = \pi + \arg(\overline{\alpha_k}) + \arg(z - z_k) = \pi - \arg(z_k) + \arg(z - z_k) \equiv \pi$ $[2\pi]$.**

PARTIE 5.

1) **D'après la partie 1, on peut conclure que $\mathcal{C}_a$ est le cercle circonscrit au triangle équilatéral de côté $[B, C]$ et privé des points B et C, de même pour $\mathcal{C}_b$ et $\mathcal{C}_c$.**

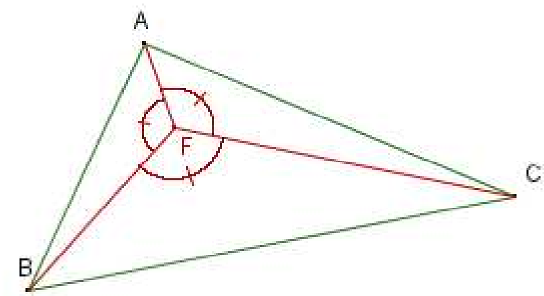
2) .

Les cercles $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ ne sont pas tangents (ce ne se produit si l'angle au triangle $(ABC) = \dfrac{2\pi}{3}$), donc ont un autre point d'intersection autre que C, qu'on notera F. Ainsi $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FB}}) \equiv \dfrac{\pi}{3}$ $[\pi]$, en utilisant la relation de Chasles, on obtient $(\widehat{\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}}) \equiv \dfrac{2\pi}{3}$ $[\pi]$, d'où $(\widehat{\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FA}}) \equiv -\dfrac{2\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}$ $[\pi]$.



3) **On considére le repère de centre F et d'axe (ox) dirigé par $\overrightarrow{AB}$. Posons dans ce repère $A(a=1)$, $B(b)$ et $C(c)$, donc $\frac{a}{|a|}=1$, or $(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}})\equiv\frac{2\pi}{3}\ [\pi]$, donc $B(b=|b|e^{2i\frac{\pi}{3}}=|b|j$ de même $(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FC}})\equiv\frac{\pi}{3}\equiv\frac{4\pi}{3}\ [\pi]$, donc $C(c=|c|j^2)$, donc finalement $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=1+j+j^2=0$.**
D'après la question 2.b) de la partie 2, on conclut que $|a|+|b|+|c|\leq|z-a|+|z-b|+|z-c|\ \forall z\in\mathbb{C}$, donc $FA+FB+FC\leq MA+MB+MC$ pour tout point M, donc le point de Torricelli-Fermat réalisé le minimum de la somme $MA+MB+MC$.
Supposons qu'il y a un autre point $M(z)$ qui réalise ce minimum, l'inégalité précèdente devient alors une égalité, et d'après la question $-\frac{a}{|a|}(z-a)=-\alpha\in\mathbb{R}^*$, donc $z=\left(\frac{\alpha}{|a|+1}\right)a$, donc $M\in(FA)$, mais aussi à $M\in(FB)$ d'où $F=M$.

Conclusion : Le point de Torricelli-Fermat est l'unique point qui réalisé le minimum de la somme $MA+MB+MC$, c'est le point intérieur du triangle (ABC) à partir duquel on voit les sommets A,B et C sous le même angle $\frac{2\pi}{3}$.



Exercice 2.

1) **On distingue trois cas :**
   - $t>b$**, l'équation n'admet pas de solutions, donc $\mathcal{C}_t=\emptyset$.**
   - $a<t<b$**, c'est l'équation réduite d'une hyperbole : $\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$, où $\alpha=\sqrt{b-t}$ et $\beta=\sqrt{t-a}$, dont les foyes sont $F'(-c,0)$ et $F(c,0)$ où $c=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{b-a}$.**
   - $t<a$**, c'est l'équation réduite d'une hyperbole : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, où $\alpha=\sqrt{a-t}$ et $\beta=\sqrt{b-t}$, dont les foyes sont $F'(-c,0)$ et $F(c,0)$ où $c=\sqrt{\beta^2-\alpha^2}=\sqrt{b-a}$.**
2) **Déjà fait dans la question précèdente.**
3) **Si une conique est d'équation cartésienne**

$$ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

alors son l'équation de sa tangente en un point $M(x_0,y_0)$ est de la forme

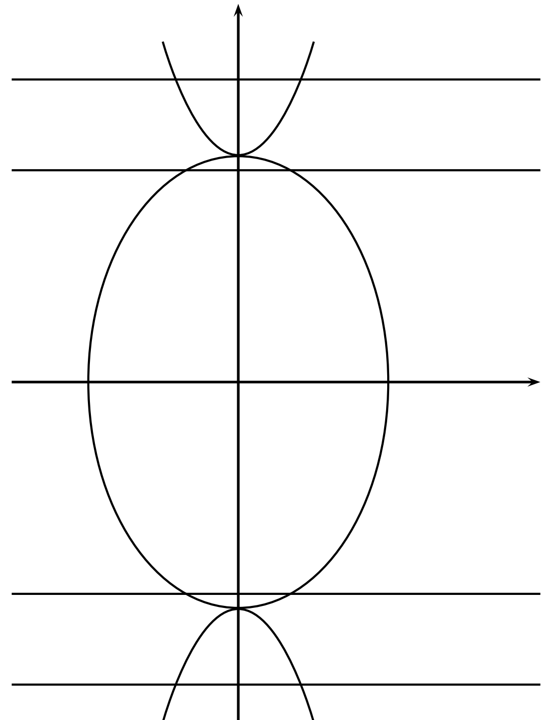
$$axx_0+b(xy_0+x_0y)+cyy_0+\alpha\frac{x+x_0}{2}+\beta\frac{y+y_0}{2}+\gamma=0$$

4) **Les équations des tangentes en un point $M(x_0,y_0)$ commun à $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_s$ sont respectivement $\frac{xx_0}{a-t}+\frac{yy_0}{b-t}=1$ et $\frac{xx_0}{a-s}+\frac{yy_0}{b-s}=1$, dont les vecteurs directeurs sont respectivement $\left(-\frac{y_0}{b-t},\frac{x_0}{a-t}\right)$ et $\left(-\frac{y_0}{b-s},\frac{x_0}{a-s}\right)$ et dont le produit scalaire est $\frac{y_0^2}{(b-t)(b-s)}+\frac{x_0^2}{(a-t)(a-s)}=\frac{1}{t-s}\left(\frac{y_0^2}{b-t}-\frac{y_0^2}{b-s}+\frac{x_0^2}{a-t}-\frac{x_0^2}{a-s}\right)=0$, car (x_0,y_0) vérifie les équations de $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_s$.**

5) **On a :**
   - $\mathcal{C}_0:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$**, est une ellipse, ses foyer sont de coordonnées $(0,\pm\sqrt{5})$ et de directrices les droites d'équation $y=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$**
   - $\mathcal{C}_5:\frac{y^2}{9}-x^2=1$**, est une hyperbole, ses**

foyer sont de coordonnées $(0, \pm\sqrt{10})$ et de directrices les droites d'équation $y = \pm\dfrac{9}{\sqrt{10}}$.

.



Problème 3.

Questions préliminaires :

1) **Posons $b = E(b) + \varepsilon$ où $0 \leq \varepsilon < 1$, on a $E(a) \leq a < E(b) + \varepsilon$, d'où $E(b) - E(a) + \varepsilon \geq b - a > 1$, or $0 \leq \varepsilon < 1$ et $E(b) - E(a) \in \mathbb{N}$, donc $E(b) - E(a) \geq 1$, c'est à dire $E(a) + 1 \leq E(b)$, ainsi $a < E(a) + 1 \leq E(b) \leq b$, prendre alors $m = E(a) + 1$.**
2) **Pour $n = 0$, le résultat est vrai : $2^4 = 16 \geq 9$.**
   Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $2^{2n+4} \geq 3(2n+1)(2n+3)$, d'où $2^{2(n+1)+4} = 4.2^{2n+4} \geq 12(2n+1)(2n+3)$, or $12(2n+1)(2n+3) - 3(2(n+1)+1)(2(n+1)+3) = 3(2n+3)(6n-1) \geq 0$, donc le résultat est aussi vrai pour $n+1$.
3) **A est majorée par $\sup A$ et B par $\sup B$, donc $A \cup B$ est majorée par $\max(\sup A, \sup B)$, donc $\sup(A \cup B)$ existe, avec $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.**
   Inversement, $A \cup B$ est majorée par $\sup(A \cup B)$, alors A et B sont aussi majorées par $\sup(A \cup B)$, puisque sont incluses dans $A \cup B$, en particulier $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$, d'où l'égalité.
   Le même raisonnement est valable, pour montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

Partie I :

1) **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{2} + 1$, donc A est borné.**
2) **Il est clair que les élèments de A_1 sont négatifs, alors que ceux de A_2 sont positifs, d'où $\inf A_1 \geq \sup A_1 \leq 0 \inf A_2 \leq \sup A_2$.**
   On a $A = A_1 \cup A_2$, donc $\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \sup A_2$, or la suite $a_n = \dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{1}{2n}$, donc $\sup A_2 = \sup(a_n) = a_1 = \dfrac{3}{4}$.
3) **$b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{2^{2n+3}} - \dfrac{1}{2^{2n+1}} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3} = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)} - \dfrac{3}{2^{2n+3}} = \dfrac{2^{2n+4} - 3(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \geq 0$, d'après la question 1, du préliminaire. Ainsi (b_n) est croissante, d'où $\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \inf A_2 = \inf b_n = b_0 = -\dfrac{1}{2}$**

Partie II :

1) **.**
   a) **$(2bp + b^2) - (2ap + a^2) = (b-a)(2p + b + a) > 1 \iff p > \dfrac{1}{2(b-a)} - \dfrac{a+b}{2}$, prendre alors $p = E\left(\dfrac{1}{2(b-a)} - \dfrac{a+b}{2}\right) + 1$.**

b) **Conclusion immédiate de la question 1, du préliminaire.**

c) $k < 2bp + b^2 \leq 2p + b^2$, **d'où** $k \leq E(2p + b^2) = 2p$ **car** $0 \leq b < 1$.

a) **D'après la question 1.b) de la partie II, on a :** $(a+p)^2 = 2ap + a^2 + p^2 < k + p^2 = n < (b+p)^2 = 2bp + b^2 + p^2$, **donc** $a + p < \sqrt{n} < b + p$, **d'où** $a < \sqrt{n} - p < b$. **D'autre part** $p^2 \leq n = p^2 + k\ ioep^2 + 2p < (p+1)^2$, **d'où** $p \leq \sqrt{n} < p + 1$, **d'où** $p = E(\sqrt{n})$, **ce qui achève la démonstration.**

b) **C'est une conclusion immediate de la question précèdente.**

2) **En revenant aux démonstrations, on a** $p = E\left(\dfrac{1}{2(b-a)} - \dfrac{a+b}{2}\right) + 1$ **et** $k = E(2ap + a^2) + 1$. **Les calculs en Maple© donnent :**

```
> a:=5/10:b:=6/10:
> p:=trunc(1/(2*(b-a))-(a+b)/2)+1;
```

$$p := 5$$

```
> k:=trunc(2*a*p+a^2)+1;
```

$$k := 6$$

```
> n:=p^2+k;
```

$$n := 31$$

Vérification :

```
> evalf(sqrt(n)-trunc(sqrt(n)));
```

$$.567764363$$

Fin
à la prochaine