

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ إِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

Corrigé DS 5 (08-09): *Géométrie euclidienne* *Nombres réels*

Lundi, le 2 Février 2009

Durée : 4heures

Citation du jour :

Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné!

Mathématicien du jour

Torricelli

Evangelista Torricelli (1608-1647) est un physicien et un mathématicien italien, mais aussi élève de Galilée.

Torricelli est connu pour avoir inventé le baromètre à tube de mercure qui porte son nom. Une unité de pression, le *torr*, lui est dédiée. Elle correspond à la pression d'un millimètre de mercure. Mais c'est le *pascal* qui fut retenu comme unité du système international en hommage à Blaise Pascal, qui poursuivit et développa les recherches dans ce domaine. Il est aussi vraiment l'inventeur du *diagramme horaire* : $(t, s(t))$ où $s(t)$ désigne l'abscisse curviligne à l'instant t . Il inventa aussi la notion d'enveloppe pour l'étude des mouvements en chute libre.

Tragique destin : Torricelli meurt à l'âge de 39 ans à cause d'une typhoïde.

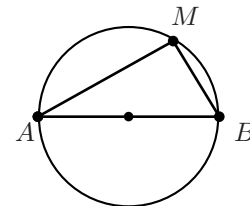


PROBLÈME 1.

PARTIE 1

1) Quand $\theta = 0$ les points A, B et M sont alignés, donc $\Gamma = (AB)$.

2) Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$, le triangle (ABM) est rectangle en M , donc M appartient au cercle de diamètre $[A, B]$.



3) On sait que $\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = AM \cdot BM \cdot \sin \theta$ et que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = AM \cdot BM \cdot \cos \theta$, d'où

$$\tan \theta = \frac{\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})}{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}}$$

Posons $M = (x, y)$, $A = (a, 0)$ et $B = (-a, 0)$, l'équation précédente devient $\begin{vmatrix} x-a & x+a \\ y & y \end{vmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix} \tan \theta$, qui donne : $-2ay = (x^2 - a^2 + y^2) \tan \theta$, on obtient finalement l'équation suivante : $x^2 + y^2 + 2y \frac{a}{\tan \theta} = a^2$.

4) L'équation précédente de Γ s'écrit aussi $x^2 + (y + \frac{a}{\tan \theta})^2 = a^2 (1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}) = \frac{a^2}{\cos^2 \theta}$, c'est l'équation du cercle de centre $\Omega(0, -\frac{a}{\tan \theta})$ et de rayon $\frac{a}{\cos \theta}$.

On remarque que $A(a, 0), B(-a, 0) \in \Gamma$ car vérifient l'équation de Γ .

Soit $M(x, y)$ un point de la tangente à Γ au point A , donc $AM \perp A\Omega$, d'où $\vec{AM} \cdot \vec{A\Omega} = 0$, c'est à dire $a(x-a) + a \frac{y}{\tan \theta} = 0$, ce qui donne

$$\Delta_A : x \cos \theta + y \sin \theta = a \cos \theta$$

Pour l'équation de Γ au point B , à l'aide d'un raisonnement analogue, on trouve :

$$\Delta_B : x \cos \theta - y \sin \theta = -a \cos \theta$$

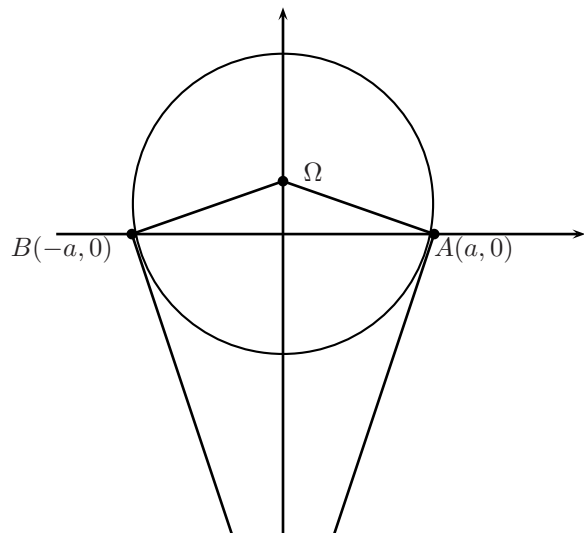
On remarque qu'elle est obtenue à partir de celle en A , en remplaçant θ par $-\theta$.

Δ_A est dirigé par le vecteur de coordonnées

$(-\sin \theta, \cos \theta) = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}))$, qui fait un angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ avec l'axe $(ox) = (AB)$.

Pour construire le point Ω , on procède comme suit :

- On trace la droite (AB) .
- On trace la droite faisant un angle $\theta + \frac{\pi}{2}$ avec (AB) au point A .
- On trace la droite faisant un angle $-\theta + \frac{\pi}{2}$ avec (AB) au point B .
- On trace les normales à ces droites respectivement aux points A et B .
- Leur intersection n'est autre que le point Ω .



PARTIE 2

1) C'est une application directe de la partie 1 :

- Si $\theta = 0$, alors A, B, C sont alignés et \mathcal{H} est la droite (AB) .

- Si $\theta \neq 0$, alors A, B, C sont cocycliques et \mathcal{H} est le cercle passant par A, B et C .

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)} \in \mathbb{R}^* &\iff \arg \left(\frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)} \right) \equiv 0 [\pi] &\iff \arg \left(\frac{d-b}{d-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) [\pi] \\ &\iff \widehat{DA, DB} \equiv \widehat{CA, CB} [\pi] &\iff D \in \mathcal{H} \\ &\iff A, B, C, D \text{ cocycliques ou alignés} \end{aligned}$$

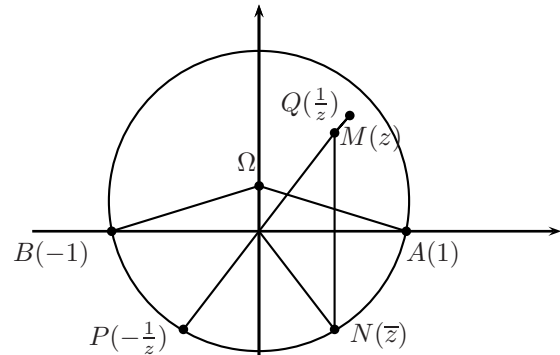
PARTIE 3

1) $\frac{(-\frac{1}{z} + 1)(z-1)}{(-\frac{1}{z} - 1)(z+1)} = -\frac{(\bar{z}-1)(z-1)}{(\bar{z}+1)(z+1)} = -\frac{|z-1|^2}{|z+1|^2} \in \mathbb{R}$, donc les points d'affixes $1, -1, z$ et $-\frac{1}{z}$ sont cocycliques, puisque non alignés.

2) Notons $A(1), B(-1)$ et $M(z)$, et $\theta \equiv \widehat{AM, BM} \equiv \arg \left(\frac{z+1}{z-1} \right) [\pi]$, d'après la partie 1, il s'agit du cercle passant par A et B et de centre $\Omega(0, -\frac{1}{\tan \theta})$.

3) Notons $M(z = re^{i\alpha})$, alors les points $A, B, N(\bar{z} = re^{-i\alpha}), P(-\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{i(\alpha+\pi)})$ sont cocycliques, avec M et N symétriques par rapport à l'axe (ox) et O, M, P alignés. La construction du point $Q(\frac{1}{z})$ sera la suivante :

- On construit le symétrique le point N symétrique de M par rapport à l'axe (ox) .
- On dessine le cercle passant par les points A, B, N .
- On construit le point P , point d'intersection de ce cercle avec la droite (OM) , vérifiant $\widehat{OM}, \widehat{OP} = \pi$.
- On construit le point Q , symétrique du point P par rapport à l'origine.



PARTIE 4

1) Notons d'abord que deux complexes non nuls z_1 et z_2 ont même argument modulo 2π équivaut à $z_2 = \lambda z_1$ avec $\lambda > 0$.

Pour $n = 2$, $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2)$, donc $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \iff \bar{z}_1 z_2 = |z_1 z_2| = |\bar{z}_1 z_2| \iff \bar{z}_1 z_2 = \lambda \in \mathbb{R}_+^* \iff z_2 = \mu z_1$ où $\mu = \frac{\lambda}{|z_1|^2} \iff \arg z_1 = \arg z_2$.

Supposons le résultat vrai pour n , et que $|z_1 + \dots + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_{n+1}|$, donc $|z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}| = |z_1 + \dots + z_{n+1}| \leq |z_1 + \dots + z_n| + |z_{n+1}| \leq |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$, d'où $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$, donc les z_k sont proportionnels pour $k \in [1, n]$, par exemple $z_k = \lambda_k z_1$ avec $\lambda_k > 0$ où $1 \leq k \leq n$. L'égalité $|z_1 + \dots + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_{n+1}|$ devient alors $|\lambda z + z_{n+1}| = |\lambda z_1| + |z_{n+1}|$ où $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$, donc $z_{n+1} = \mu z_1$, avec $\mu > 0$.

Inversement, il est clair que si $z_k = \lambda_k z_1$ avec $\lambda_k > 0$, alors $|z_1 + \dots + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_{n+1}|$.

2) a) On a $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$, donc $\sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k = 0$, d'où $\sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k (z - z_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k z}_{\text{nulle}} - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k z_k = - \sum_{k=1}^n |z_k|$, car

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}$$

b) $\sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k (z - z_k) \in \mathbb{R}_-$, donc $\left| \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k (z - z_k) \right| = - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k (z - z_k) = \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k z_k - \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k z = \sum_{k=1}^n |z_k|$,

d'autre part $\left| \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k (z - z_k) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\bar{\alpha}_k (z - z_k)| = \sum_{k=1}^n |z - z_k|$ car $|\alpha_k| = 1$.

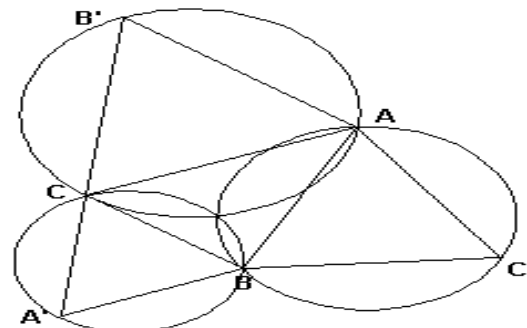
c) D'après la question 1, partie 4 ; l'inégalité précédente est une inégalité si et seulement si pour tout $k \in [1, n]$, on a : $\arg(z_k) \equiv \arg(z - z_k) [2\pi]$ si et seulement si $\arg(-\bar{\alpha}_k (z - z_k)) = \pi + \arg(\bar{\alpha}_k) + \arg(z - z_k) = \pi - \arg(z_k) + \arg(z - z_k) \equiv \pi [2\pi]$.

PARTIE 5.

1) D'après la partie 1, on peut conclure que \mathcal{C}_a est le cercle circonscrit au triangle équilatéral de côté $[B, C]$ et privé des points B et C , de même pour \mathcal{C}_b et \mathcal{C}_c .

2) .

Les cercles \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_b ne sont pas tangents (ce ne se produit si l'angle au triangle $(ABC) = \frac{2\pi}{3}$), donc ont un autre point d'intersection autre que C , qu'on notera F . Ainsi $\widehat{(FA, FC)} \equiv \widehat{(FC, FB)} \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$, en utilisant la relation de Chasles, on obtient $\widehat{(FA, FB)} \equiv \frac{2\pi}{3} [\pi]$, d'où $\widehat{(FB, FA)} \equiv -\frac{2\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$.

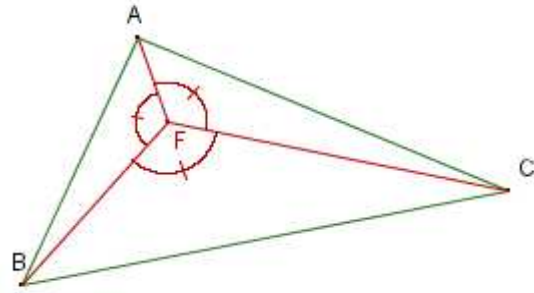


- 3) On considère le repère de centre F et d'axe (ox) dirigé par \overrightarrow{AB} . Posons dans ce repère $A(a=1)$, $B(b)$ et $C(c)$, donc $\frac{a}{|a|} = 1$, or $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [\pi]$, donc $B(b = |b|e^{2i\frac{\pi}{3}} = |b|j)$ de même $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FC}) \equiv \frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3} [\pi]$, donc $C(c = |c|j^2)$, donc finalement $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} = 1 + j + j^2 = 0$.

D'après la question 2.b) de la partie 2, on conclut que $|a|+|b|+|c| \leq |z-a|+|z-b|+|z-c| \forall z \in \mathbb{C}$, donc $FA+FB+FC \leq MA+MB+MC$ pour tout point M , donc le point de Torricelli-Fermat réalisé le minimum de la somme $MA+MB+MC$.

Supposons qu'il y a un autre point $M(z)$ qui réalise ce minimum, l'inégalité précédente devient alors une égalité, et d'après la question $-\frac{a}{|a|}(z-a) = -\alpha \in \mathbb{R}^*$, donc $z = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|+1}\right)a$, donc $M \in (FA)$, mais aussi à $M \in (FB)$ d'où $F = M$.

Conclusion : Le point de Torricelli-Fermat est l'unique point qui réalise le minimum de la somme $MA+MB+MC$, c'est le point intérieur du triangle (ABC) à partir duquel on voit les sommets A, B et C sous le même angle $\frac{2\pi}{3}$.



Exercice 2.

- 1) On distingue trois cas :
 - $t > b$, l'équation n'admet pas de solutions, donc $\mathcal{C}_t = \emptyset$.
 - $a < t < b$, c'est l'équation réduite d'une hyperbole : $\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1$, où $\alpha = \sqrt{b-t}$ et $\beta = \sqrt{t-a}$, dont les foyes sont $F'(-c, 0)$ et $F(c, 0)$ où $c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{b-a}$.
 - $t < a$, c'est l'équation réduite d'une hyperbole : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, où $\alpha = \sqrt{a-t}$ et $\beta = \sqrt{b-t}$, dont les foyes sont $F'(-c, 0)$ et $F(c, 0)$ où $c = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \sqrt{b-a}$.
- 2) Déjà fait dans la question précédente.
- 3) Si une conique est d'équation cartésienne

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

alors son l'équation de sa tangente en un point $M(x_0, y_0)$ est de la forme

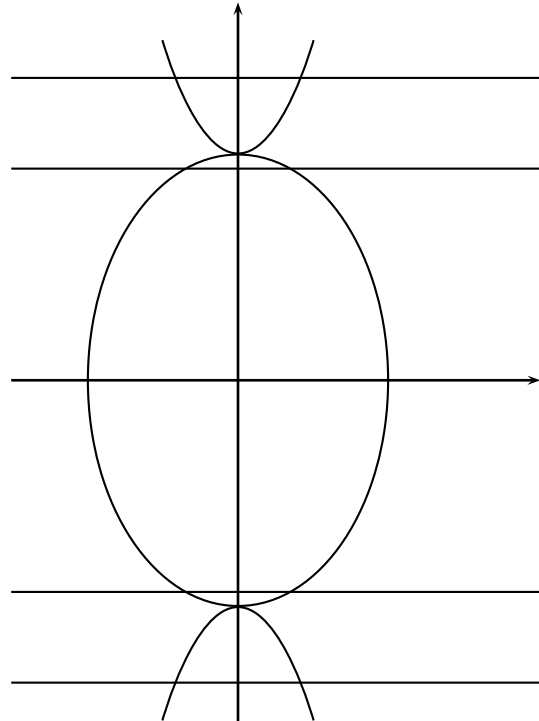
$$axx_0 + b(xy_0 + x_0y) + cyy_0 + \alpha \frac{x+x_0}{2} + \beta \frac{y+y_0}{2} + \gamma = 0$$

- 4) Les équations des tangentes en un point $M(x_0, y_0)$ commun à \mathcal{C}_t et \mathcal{C}_s sont respectivement $\frac{xx_0}{a-t} + \frac{yy_0}{b-t} = 1$ et $\frac{xx_0}{a-s} + \frac{yy_0}{b-s} = 1$, dont les vecteurs directeurs sont respectivement $\left(-\frac{y_0}{b-t}, \frac{x_0}{a-t}\right)$ et $\left(-\frac{y_0}{b-s}, \frac{x_0}{a-s}\right)$ et dont le produit scalaire est $\frac{y_0^2}{(b-t)(b-s)} + \frac{x_0^2}{(a-t)(a-s)} = \frac{1}{t-s} \left(\frac{y_0^2}{b-t} - \frac{y_0^2}{b-s} + \frac{x_0^2}{a-t} - \frac{x_0^2}{a-s}\right) = 0$, car (x_0, y_0) vérifie les équations de \mathcal{C}_t et \mathcal{C}_s .

- 5) On a :

<ul style="list-style-type: none"> - $\mathcal{C}_0 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, est une ellipse, ses foyer sont de coordonnées $(0, \pm\sqrt{5})$ et de direc- 	<ul style="list-style-type: none"> trices les droites d'équation $y = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$ - $\mathcal{C}_5 : \frac{y^2}{9} - x^2 = 1$, est une hyperbole, ses
---	---

foyer sont de coordonnées $(0, \pm\sqrt{10})$ et de directrices les droites d'équation $y = \pm \frac{9}{\sqrt{10}}$.



Problème 3.

Questions préliminaires :

- 1) Posons $b = E(b) + \varepsilon$ où $0 \leq \varepsilon < 1$, on a $E(a) \leq a < E(b) + \varepsilon$, d'où $E(b) - E(a) + \varepsilon \geq b - a > 1$, or $0 \leq \varepsilon < 1$ et $E(b) - E(a) \in \mathbb{N}$, donc $E(b) - E(a) \geq 1$, c'est à dire $E(a) + 1 \leq E(b)$, ainsi $a < E(a) + 1 \leq E(b) \leq b$, prendre alors $m = E(a) + 1$.
- 2) Pour $n = 0$, le résultat est vrai : $2^4 = 16 \geq 9$.
Supposons le résultat vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est à dire $2^{2n+4} \geq 3(2n+1)(2n+3)$, d'où $2^{2(n+1)+4} = 4 \cdot 2^{2n+4} \geq 12(2n+1)(2n+3)$, or $12(2n+1)(2n+3) - 3(2(n+1)+1)(2(n+1)+3) = 3(2n+3)(6n-1) \geq 0$, donc le résultat est aussi vrai pour $n+1$.
- 3) A est majorée par $\sup A$ et B par $\sup B$, donc $A \cup B$ est majorée par $\max(\sup A, \sup B)$, donc $\sup(A \cup B)$ existe, avec $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.
Inversement, $A \cup B$ est majorée par $\sup(A \cup B)$, alors A et B sont aussi majorées par $\sup(A \cup B)$, puisque sont incluses dans $A \cup B$, en particulier $\sup(A \cup B) \geq \max(\sup A, \sup B)$, d'où l'égalité.
Le même raisonnement est valable, pour montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

Partie I :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left| \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \right| \leq \frac{1}{2} + 1$, donc A est borné.
- 2) Il est clair que les éléments de A_1 sont négatifs, alors que ceux de A_2 sont positifs, d'où $\inf A_1 \geq \sup A_1 \leq 0 \leq \inf A_2 \leq \sup A_2$.
On a $A = A_1 \cup A_2$, donc $\sup A = \max(\sup A_1, \sup A_2) = \sup A_2$, or la suite $a_n = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2n}$, donc $\sup A_2 = \sup(a_n) = a_1 = \frac{3}{4}$.
- 3) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^{2n+3}} - \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{3}{2^{2n+3}} = \frac{2^{2n+4} - 3(2n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3) \cdot 2^{2n+3}} \geq 0$, d'après la question 1, du préliminaire. Ainsi (b_n) est croissante, d'où $\inf A = \min(\inf A_1, \inf A_2) = \inf A_2 = \inf b_n = b_0 = -\frac{1}{2}$

Partie II :

- 1) .
 - a) $(2bp + b^2) - (2ap + a^2) = (b-a)(2p + b + a) > 1 \iff p > \frac{1}{2(b-a)} - \frac{a+b}{2}$, prendre alors $p = E\left(\frac{1}{2(b-a)} - \frac{a+b}{2}\right) + 1$.

b) Conclusion immédiate de la question 1, du préliminaire.

c) $k < 2bp + b^2 \leq 2p + b^2$, d'où $k \leq E(2p + b^2) = 2p$ car $0 \leq b < 1$.

a) D'après la question 1.b) de la partie II, on a : $(a + p)^2 = 2ap + a^2 + p^2 < k + p^2 = n < (b + p)^2 = 2bp + b^2 + p^2$, donc $a + p < \sqrt{n} < b + p$, d'où $a < \sqrt{n} - p < b$. D'autre part $p^2 \leq n = p^2 + k$ i.e. $p^2 + 2p < (p + 1)^2$, d'où $p \leq \sqrt{n} < p + 1$, d'où $p = E(\sqrt{n})$, ce qui achève la démonstration.

b) C'est une conclusion immédiate de la question précédente.

2) En revenant aux démonstrations, on a $p = E\left(\frac{1}{2(b-a)} - \frac{a+b}{2}\right) + 1$ et $k = E(2ap + a^2) + 1$.

Les calculs en Maple[©] donnent :

> a:=5/10:b:=6/10:

> p:=trunc(1/(2*(b-a))-(a+b)/2)+1;

$p := 5$

> k:=trunc(2*a*p+a^2)+1;

$k := 6$

> n:=p^2+k;

$n := 31$

Vérification :

> evalf(sqrt(n)-trunc(sqrt(n)));

.567764363

*Fin
à la prochaine*