DS 3 : *Structures - Nombres complexes*

Lundi 06 Décembre 2004

CORRIGÉ

Problème 1:

1. (a) $x+x=(x+x)^2=x^2+x+x+x^2=x+x+x+x$, donc $\forall x\in A$, on a : $2x=0_A$.

   (b) $x+y=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=x+xy+yx+y$, donc $\forall (x,y)\in A^2$, on a : $xy+yx=0_A$.

   (c) $yx=yx+xy+yx=xy$ car $xy+yx=0_A$ et $xy+xy=0_A$, d'où tout anneau booléen est commutatif.

2. (a) $\forall x\in E \quad \varphi_E(x)=1$ par définition de 1_E et $\forall x\in E \quad x\notin$, d'où $\varphi_\emptyset(x)=0$.

   (b) On peut résumer tous les cas dans les tableaux suivants :

x	$\varphi_A(x)$	$\varphi_B(x)$	$\varphi_{A\cap B}(x)$	$\varphi_A(x)\varphi_B(x)$	$\varphi_{A\cup B}(x)$	$\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-\varphi_A(x)\varphi_B(x)$
x$\in A \quad x\in B$	1	1	1	1x 1	1	1+1-1x 1
x$\in A \quad x\notin B$	1	0	0	1×0	1	1+1-1×0
x$\notin A \quad x\in B$	0	1	0	0×1	1	0+1-0x1
x$\notin A \quad x\notin B$	0	0	0	0 x0	0	0+0-0x0

x	$\varphi_A(x)$	$\varphi_B(x)$	$\varphi_{\overline{A}}(x)$	1-$\varphi_A(x)$	$\varphi_{A\Delta B}(x)$	$\varphi_A(x)+\varphi_B(x)-2\varphi_A(x)\varphi_B(x)$
x$\in A \quad x\in B$	1	1	0	1-1	0	1+1-2x1x1
x$\in A \quad x\notin B$	1	0			1	1+0-2x1x0
x$\notin A \quad x\in B$	0	1	1	1-0	1	0+1-2x0x1
x$\notin A \quad x\notin B$	0	0			0	0+0-0x0x0

   (c) $x\in A \Leftrightarrow \varphi_A(x)=1 \Leftrightarrow \varphi_B(x)=1 \Leftrightarrow x\in B$, d'où $A=B$.

   (d) Soient A, B *et* C sont trois parties de E alors :
   $\varphi_{A\Delta(B\Delta C)}=\varphi_A+\varphi_{B\Delta C}-2\varphi_A\varphi_{B\Delta C}=\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C-2\varphi_B\varphi\mathbb{C}-2\varphi_A\varphi_B-2\varphi_A\varphi_C+4\varphi_A\varphi_B\varphi_C$, et $\varphi_{(A\Delta B)\Delta C}=\varphi_{A\Delta B}+\varphi_C-2\varphi_{A\Delta B}\varphi_C=\varphi_A+\varphi_B-2\varphi_A\varphi_B+\varphi_C-2\varphi_C\varphi_A-2\varphi_C\varphi_B+4\varphi_C\varphi_A\varphi_B$, ainsi on trouve que : $\varphi_{A\Delta(B\Delta C)}=\varphi_{(A\Delta B)\Delta C}$, d'où $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$. De manière pareille on montre que : $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

   (e) Δ est associative d'aprés la question précédente, et evidement commutative, et admet comme élément neutre : $\forall X\in\mathcal{P}(E) \quad X\Delta=X$, et tout élément est inversible pour Δ avec pour inverse lui même : $\forall X\in\mathcal{P}(E) \quad X\Delta X=$, ainsi $(\mathcal{P}(E),\Delta)$ est un groupe abélien.
   D'autre par $\cap$ est distributive par rapport à Δ d'aprés lma question précédente et evidement associative et admet E comme élément neutre : $\forall X\in\mathcal{P}(E) \quad X\Delta E=X$, donc $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau.
   En plus $\forall X\in\mathcal{P}(E) \quad X\cap X=X$, donc $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau booléen.

(f) D'abord l'élémnt neutre pour la 2ème loi est E appartient à $\{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$. Ensuite pour tout couple $(X,Y) \in \{\emptyset, A, \overline{A}, E\}^2$ on résume les cas possibles dans les tableau suivant pour l'intersection :

X∩Y	X=A	X=$\overline{A}$	X=	X=E
Y=A	A			A
Y=$\overline{A}$		$\overline{A}$		$\overline{A}$
Y=				
Y=E	A	$\overline{A}$		E

Et de même pour Δ, dans tous les cas on a : $X\Delta Y^{-1} \in \{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$; $X \cap Y \in \{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$, on en conclut donc que $\{\emptyset, A, \overline{A}, E\}$ est un sous-anneau de $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.

3. Si $(A, +, \times)$ est intégre, comme $\forall x \in A$ on a $x^2 = x$ alors $x^2 - x = 0_A$, d'où $x(x - 1_A) = 0_A$ et donc $x = 0_A$ ou $x = 1_A$ d'où $\text{card}(A) \leq 2$.
4. $a \in \mathcal{A}$ donc $aa' = 0_A$ ou bien a', $a' \in \mathcal{A}$ donc $aa' = 0_A$ ou bien a comme $a \neq a'$ alors $aa' = 0_A$.
5. (a) Soit $(x,y) \in A^2$, et $a \in \mathcal{A}$ on remarque que $a \notin \Phi(x) \Leftrightarrow ax = 0_A$.
   i. $a \in \Phi(x) \cap \Phi(y) \implies ax = x, ay = y \implies axy = xy \implies a \in \Phi(xy)$, d'où $\Phi(x) \cap \Phi(y) \subset \Phi(xy)$.
   Inversement $a \notin \Phi(x) \cap \Phi(y) \implies a \notin \Phi(x)$ ou $a \notin \Phi(y) \implies ax = 0_A$ ou $ay = 0_A \implies axy = 0_A \implies a \notin \Phi(xy)$, et par contraposée on a :
   $a \in \Phi(xy) \implies a \in \Phi(x) \cap \Phi(y)$, et donc $\Phi(x) \cap \Phi(y) \supset \Phi(xy)$. D'ou l'égalité.
   ii. $x \in \Phi(x) \cup \Phi(y) \implies ax = a$ ou $ay = a \implies (a(x+y+xy) = ax + ay + axy = a + ay + ay = a + 2ay = a$ ou $a(x+y+xy) = ax + ay + axy = ax + a + ayx = ax+a+ax = a+2ax = a) \implies a \in \Phi(x+y+xy)$, donc $\Phi(x) \cup \Phi(y) \subset \Phi(x+y+xy)$.
   Inversement : $a \notin \Phi(x)$ et $a \notin \Phi(y) \implies ax = ay = 0_A \implies a(x+y+xy) = ax + ay + axy = 0_A \implies a \notin \Phi(x+y+xy)$, et par contraposée on conclut que $\Phi(x) \cup \Phi(y) \supset \Phi(x+y+xy)$, d'où l'égalité.
   iii. $a \in \overline{\Phi(x)} \Leftrightarrow a \notin \Phi(x) \Leftrightarrow ax = 0_A \Leftrightarrow a(1_A + x) = a + ax = a \Leftrightarrow a \in \Phi(1_A + x)$, d'où l'égalité.
   iv. $\Phi(x)\Delta\Phi(y) = (\Phi(x) \cup \Phi(y)) \cap \overline{\Phi(x) \cap \Phi(y)} = \Phi(x+y+xy) \cap \overline{\Phi(xy)} = \Phi(x+y+xy) \cap \Phi(1_A + xy) = \Phi((x+y+xy)(1_A+xy)) = \Phi(x+y+xy+xyx+yxy+xyxy) = \Phi(x+y+xy+xy+xy+xy) = \Phi(x+y)$, car $xy + xy = 0_A, xy = yx$.

   (b) Pour que Φ soit un morphisme d'anneaux il faut qu'il vérifie : $\Phi(x+y) = \Phi(x)\Delta\Phi(y)$; $\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$ et enfin $\Phi(1_A) = E$ vrai car $\forall a \in E$ on a : $a1_A = a$, d'où $a \in \Phi(1_A)$.
6. (a) Par négation de $a_0 \in \mathcal{A}$
   (b) Raisonnons par l'absurde donc $\forall x \in A$ on a : $a_0 x \notin \mathcal{A}$, en particulier $a_0 x_1 \notin \mathcal{A}$, or $a_0 x_1 \neq 0_A$, $a_0 x_1$ jouera le même rôle que celui de a_0 dans la question précédente, donc $\exists x_2 \in A$ tel que: $a_0 x_1 x_2 \neq 0_A$ et $a_0 x_1 x_2 \neq a_0 x_2$, posons $y_0 = a_0, y_1 = a_0 x_1, y_2 = a_0 x_1 x_2$, ils sont tous non nuls, d'autre part $y_0 \neq y_1, y_1 \neq y_2$ et si on suppose $y_0 = y_2$ alors $a_0 = a_0 x_1 x_2$ d'où $y_1 = a_0 x_1 = a_0 x_1 x_2 x_1 = a_0 x_1 x_2 = y_2$, impossible donc $y_0 \neq y_2$ aussi, ainsi on a construit 3 élément distincts de A et on pourra continuer ainsi jusqu'à dépasser le cardinal de A ce qui n'est pas le cas , d'où ce qu'on a supposé est faux.
   (c) Pour conclure que Φ est injectif il suffit de montrer que $\text{Ker}\Phi = 0_A$, c'est à dire $\Phi(x) = \implies x = 0_A$, notons a_0 au lieu de x pour utiliser la question précédente et supposons

$a_0 \neq 0_A$. D'abord $a_0 \notin \mathcal{A}$ car sinon comme $a_0^2 = a_0$ on aurait $a_0 \in \Phi(a_0)$, impossible puisque $\Phi(a_0) =$, et donc $\exists x \in A$ tel que: $a_0 x \in \mathcal{A}$, donc $a_0 x a_0 = 0_A$ car sinon $a_0 x \in \Phi(a_0) =$, d'où $a_0 x = 0_A$, impossible car $a_0 x \in \mathcal{A}$, d'où $a_0 = 0_A$.

(d) $a \in F \implies \exists 1 \leq j \leq p$ tel que: $a = x_j \implies ax_j = x_j^2 = x_j = a$ et $\forall i \neq j \quad ax_i = x_j x_i = 0_A$, d'aprés (4) et donc $a\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} ax_i = a$, d'où $a \in \Phi(\sum_{i=1}^{p} x_i)$, ainsi $F \subset \Phi(\sum_{i=1}^{p} x_i)$.
Inversement $a \in F \implies \forall 1 \leq j \leq p \quad a \neq x_j \implies ax_j = 0$, d'aprés (4) et donc $a\sum_{i=1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} ax_i = 0_A$, d'où $a \notin \Phi(\sum_{i=1}^{p} x_i)$, ainsi par contraposée on obtient
$F \supset \Phi(\sum_{i=1}^{p} x_i)$. D'où l'égalité.

(e) Φ est une bijection entre A et $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, donc card (A)=card$(\mathcal{P}(\mathcal{A})) = 2^{card\mathcal{A}}$, donc le cardinal de A est une puissance de 2.

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca