MPSI-PRÉPAS HIGH TECH

Étude encadrée

Structures

RABAT LE 6 MARS 2010

Blague du jour :

• Quel est le grand jeu des fonctionnaires le lundi matin ?
Réponse : Le premier qui a bougé a perdu !
• Quel est le point commun entre un professeur qui part à la retraite et les gants d'un chirurgien ?
Réponse : Ils sortent tous les deux du corps enseignant (en saignant).

Mathématicien du jour **Bessel**

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) est un astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation.

Mercredi 10 Mars 2010.
Durée : 1 heure

: On appelle E l'ensemble des réels de la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont éléments de $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $a+b\sqrt{2}=a'+b'\sqrt{2}$ si et seulement si $(a,b)=(a',b')$.
2. Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?
3. On note G l'ensemble des éléments inversibles de E.
   (a) Calculer $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$. Que peut-on en conclure ?
   (b) Montrer que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.
4. Montrer : $a+b\sqrt{2}\in G \Leftrightarrow \left|a^2-2b^2\right|=1$
5. Soit $a+b\sqrt{2}$ un élément de G avec $a>0$ et $b>0$.
   (a) Montrer que $b\leqslant a<2b$, et préciser le cas d'égalité.
   (b) On note $a_1+b_1\sqrt{2}$ le « quotient » de $a+b\sqrt{2}$ par $1+\sqrt{2}$.
      i. Montrer que si $a\neq b$ alors $\begin{cases} 0<a_1<a \\ 0<b_1<b \end{cases}$
      ii. Montrer que si $a=b$ alors $a_1=1$ et $b_1=0$
   (c) En conclure qu'il existe un entier naturel n tel que $a+b\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^n$.
6. Expliciter l'ensemble des inversibles de E.

Fin

Bonne chance