

CONTRÔLE : *Groupes cycliques.*  
*Fonctions usuelles.*

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : [myismail1@menara.ma](mailto:myismail1@menara.ma)

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
وَقُلْ إِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ  
صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n, 2/n, ..., n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

**Exercice 1.** .  $G = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } z^{2^n} = 1\}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $U_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } z^n = 1\}$ , appelé ensemble des racines  $n^{\text{ème}}$  de l'unité

- 1) Montrer que  $G$  et  $U_n$  sont des sous groupes de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
- 2) Montrer que  $U_n$  est fini monogène.
- 3) Montrer que  $U_{2^n} \subset G$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , en déduire que  $G$  est infini.
- 4) On suppose que  $G$  est monogène, engendré par  $a$ , montrer que :

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } G \subset U_{2^n}$$

En déduire une contradiction puis conclure.

- 5) (\*) Montrer que tout sous-groupe fini du groupe  $G$  est cyclique.

**Exercice 2.** .

- 1) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$\arctan(2x + 1) - \arctan(2x - 1) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

- 2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer

$$S_n = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

- 3) Déterminer la limite de  $S_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .