Contrôle : *Groupes cycliques. Fonctions usuelles.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسوُلُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Exercice 1. . $G = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $\exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $z^{2^n} = 1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1\}$, appelé ensemble des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité

1) Montrer que G et $\mathbb{U}_n$ sont des sous groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2) Montrer que $\mathbb{U}_n$ est fini monogène.
3) Montrer que $\mathbb{U}_{2^n} \subset G$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en déduire que G est infini.
4) On suppose que G est monogène, engendré par a, montrer que :
$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } G \subset U_{2^n}$$
En déduire une contradiction puis conclure.
5) (*) Montrer que tout sous-groupe fini du groupe G est cyclique.

Exercice 2. .

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\arctan(2x+1) - \arctan(2x-1) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$
3) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.