

Corrigé du Contrôle : *Groupes cycliques*
Fonctions usuelles

Exercice 1

1. Utiliser la propriété caractéristiques des sous-groupes.

D'abord $1 \in \mathbb{U}_n$ et $1 \in G$ (clair).

D'autre part soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$, donc $z_1^n = z_2^n = 1$, d'où $(z_1 \cdot z_2^{-1})^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = 1$, donc $z_1 \cdot z_2^{-1} \in \mathbb{U}_n$.

De même soit $z_1, z_2 \in G$, donc $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tel que $z_1^{2^n} = z_2^{2^m} = 1$, d'où $(z_1 \cdot z_2^{-1})^{2^{n+m}} = \frac{z_1^{2^{n+m}}}{z_2^{2^{n+m}}} = \frac{z_1^{2^n 2^m}}{z_2^{2^m 2^n}} = \frac{(z_1^{2^n})^{2^m}}{(z_2^{2^m})^{2^n}} = 1$, donc $z_1 \cdot z_2^{-1} \in G$.

2. On sait d'après le cours de nombres complexes que : $z \in \mathbb{U}_n \iff z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $0 \leq k \leq n-1$, donc $\mathbb{U}_n = \{w^k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n-1\} = \langle \omega \rangle$ où $\omega = \frac{2i\pi}{n}$, donc \mathbb{U}_n est fini de cardinal n monogène engendré par ω .
3. $\mathbb{U}_{2^n} \subset G$, $\forall n \in \mathbb{N}$, est évident par définition de \mathbb{U}_{2^n} et G , donc $2^n = \text{card } \mathbb{U}_{2^n} \leq \text{card } G$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où $\text{card } G = +\infty$.
4. Supposons que $G = \langle a \rangle$, donc puisque $a \in G$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $a^{2^n} = 1$, d'où $x = a^k \in G \implies x^{2^n} = (a^k)^{2^n} = (a^{2^n})^k = 1 \implies G \subset \mathbb{U}_{2^n}$, impossible car G est infini alors que \mathbb{U}_{2^n} est fini.
5. Soit $H = \{x_1, \dots, x_p\}$ un sous-groupe fini de G , $\forall x_i \in H \subset G$, exists $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $x_i^{2^{n_i}} = 1$, prenons $n = \max\{n_1, \dots, n_p\}$, donc $n = n_i + \varepsilon_i$, d'où $x_i^{2^n} = x_i^{2^{n_i} 2^{\varepsilon_i}} = (x_i^{2^{n_i}})^{2^{\varepsilon_i}} = 1$, donc $H \subset \mathbb{U}_{2^n}$, qui cyclique donc H aussi, (résultat vu en TD qu'il faut redémontrer pour pouvoir l'utiliser).

Exercice 2