.

Corrigé du Contrôle : *Groupes cycliques Fonctions usuelles*

Exercice 1

1. **Utiliser la propriété caractéristiques des sous-groupes.**
   D'abord $1 \in \mathbb{U}_n$ **et** $1 \in G$ **(clair).**
   D'autre part soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}_n$**, donc** $z_1^n = z_2^n = 1$**, d'où** $(z_1.z_2^{-1})^n = \dfrac{z_1^n}{z_2^n} = 1$**, donc** $z_1.z_2^{-1} \in \mathbb{U}_n$**.**
   De même soit $z_1, z_2 \in G$**, donc** $\exists n, m \in \mathbb{N}$ **tel que** $z_1^{2^n} = z_2^{2^m} = 1$**, d'où** $(z_1.z_2^{-1})^{2^{n+m}} = \dfrac{z_1^{2^{n+m}}}{z_2^{2^{n+m}}} = \dfrac{z_1^{2^n 2^m}}{z_2^{2^m 2^n}} = \dfrac{(z_1^{2^n})^{2^m}}{(z_2^{2^m})^{2^n}} = 1$**, donc** $z_1.z_2^{-1} \in G$**.**
2. **On sait d'aprés le cours de nombres complexes que :** $z \in \mathbb{U}_n \Longleftrightarrow z = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}},\ 0 \leq k \leq n-1$**, donc** $\mathbb{U}_n = \{w^k$ **tel que** $0 \leq k \leq n-1\} =< \omega >$ **où** $\omega = \dfrac{2i\pi}{n}$**, donc** $\mathbb{U}_n$ **est fini de cardinal** n **monogène engendré par** ω**.**
3. $\mathbb{U}_{2^n} \subset G,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$**, est evident par définition de** $\mathbb{U}_{2^n}$ **et** G**, donc** $2^n =$ ***card*** $\mathbb{U}_{2^n} \leq$ ***card*** $G,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$**, d'où** ***card*** $G = +\infty$**.**
4. **Supposons que** $G = \langle a \rangle$**, donc puisque** $a \in G$**,** $\exists n \in \mathbb{N}$ **tel que** $a^{2^n} = 1$**, d'où** $x = a^k \in G \Longrightarrow x^{2^n} = (a^k)^{2^n} = (a^{2^n})^k = 1 \Longrightarrow G \subset \mathbb{U}_{2^n}$**, impossible car** G **est infini alors que** $\mathbb{U}_{2^n}$ **est fini.**
5. **Soit** $H = \{x_1, \ldots, x_p\}$ **un sous-groupe fini de** G**,** $\forall\ x_i \in H \subset G,\ exists n_i \in \mathbb{N}$ **tel que** $x_i^{2^{n_i}} = 1$**, prenons** $n = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$**, donc** $n = n_i + \varepsilon_i$**, d'où** $x_i^{2^n} = x_i^{2^{n_i} 2^{\varepsilon_i}} = (x_i^{2^{n_i}})^{2^{\varepsilon_i}} = 1$**, donc** $H \subset U_{2^n}$**, qui cyclique donc** H **aussi, (résultat vu en TD qu'il faut redémontrer pour pouvoir l'utiliser).**

Exercice 2

.