Dans tout le problème, on note I l'intervalle $I =]-1, 1[$.
Nous allons munir I d'une structure de groupe un peu particulière.

1. Montrer que : $\forall (s,t) \in I^2,\ 1 + st \neq 0$.
   On pose, pour tous s et t de I : $s * t := \dfrac{s+t}{1+st}$.
2. (a) Soit $s \in I$ *fixé*. Etudier la fonction $f : \left| \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) = s * t = \dfrac{s+t}{1+st} \end{array} \right.$.
   En déduire que $*$ est une loi de composition interne dans I.
   (b) Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.
   (c) $([0, 1[, *)$ est-il un sous-groupe de $(I, *)$?
   (d) Soit x un réel strictement positif (fixé). On considère l'ensemble $H_x = \left\{ \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1},\ \text{avec } n \in \mathbb{Z} \right\}$.
   Ainsi, on a la caractérisation : $(s \in H_x) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} \mid s = \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1})$
   Montrer que $(H_x, *)$ est un sous-groupe de $(I, *)$.
3. Soit $s \in I$, avec $s \neq 0$.
   Dans cette question, on désire expliciter $\underbrace{s * s * s \cdots * s}_{n \text{ fois}}$, que l'on notera $s^{[n]}$.
   On prendra la convention $s^{[0]} = 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s^{[n]}$ peut s'écrire $\dfrac{p_n}{q_n}$ avec les suites $(p_n)_{n \geq 0}$ et $(q_n)_{n \geq 0}$ définies par :
   $$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = 0 \\ q_0 = 1 \end{array} \right. \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = p_n + s q_n \\ q_{n+1} = s p_n + q_n \end{array} \right.$$
   (b) Exprimer $s q_{n+1}$ en fonction de p_{n+1} et p_n puis exprimer p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n.
   (c) En déduire l'expression générale de p_n puis celle de q_n.
   (d) Exprimer $s^{[n]}$. On observera que cette formule vaut aussi pour $s = 0$.
4. Montrer que la fonction th (tangente hyperbolique) définie par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ réalise un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(I, *)$.
5. Exploiter ces résultats pour exprimer $\mathrm{th}(nx)$ en fonction de $\mathrm{th}(x)$.
   Application : exprimer $\mathrm{th}(2x)$, $\mathrm{th}(3x)$, $\mathrm{th}(3x)$, $\mathrm{th}(4x)$, $\mathrm{th}(5x)$ en fonction de $\mathrm{th}(x)$.

Le coin des physiciens : en mécanique classique, si v est la vitesse d'un mobile dans un référentiel animé lui-même d'une vitesse V, alors la vitesse du mobile vue d'un référentiel au repos s'exprime comme $v' = v + V$. En relativité restreinte, la loi de composition des vitesses devient $v' = \dfrac{v+V}{1 + \frac{vV}{c^2}}$ (où c est la vitesse de la lumière).
Cela peut aussi s'écrire : $\dfrac{v'}{c} = \dfrac{\frac{v}{c} + \frac{V}{c}}{1 + \frac{v}{c}\frac{V}{c}} = \left(\dfrac{v}{c}\right) * \left(\dfrac{V}{c}\right)$ sachant que l'on a toujours $\dfrac{v}{c} \in]-1, 1[$ et $\dfrac{V}{c} \in]-1, 1[$.
Si les vitesses sont faibles devant celle de la lumière, ces deux expressions sont équivalentes.