MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Mercredi 21 Novembre 2007.

1) Raisonnons par l'absurde, $1+st=0 \Longrightarrow st=-1\neq 0 \Longrightarrow s\neq 0$, et donc $t=-\dfrac{1}{s}$, or $s\in]-1,1[\Longrightarrow \dfrac{1}{s}\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\Longrightarrow t=-\dfrac{1}{s}\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, absurde car $t\in]-1,1[$.

2) a) $f'(t)=\dfrac{1-s^2}{(1-st)^2}\geq 0, f(-1)=-1, f(1)=1$ donc $f(I)=I$.
$\forall (s,t)\in I^2$, on a : $s*t=f(t)\in I$, donc $*$ est bien une LCI sur I.

b) Il est clair que $*$ est commutattive, on vérifie facilement que $(t*r)*s=t*(r*s)$, donc associative, que 0 est l'élément neutre et que l'inverse de s pour $*$ n'est autre que $-s$, donc $(I,*)$ est un groupe commutatif.

c) Non, cat $[0,1[$ n'est pas stable par passage à l'inverse, dans notre cas passage à l'opposé.

d) D'abord il est clair que $H_x\subset I$ et que $0\in H_x$ (prendre $n=0$).
Ensuite, soit $(n,m)\in Z^2$ et $(y=\dfrac{x^n-1}{x^n+1}, y=\dfrac{x^m-1}{x^m+1})\in H_x\times H_x$, on a $y*z^{-1}=y*(-z)=\dfrac{y-z}{1-yz}=\dfrac{2x^n-2x^m}{2x^n+2x^m}=\dfrac{x^p-1}{x^p+1}\in H_x$ où $p=n-m$.

3) a) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, pour $n=0$, vrai d'aprés l'énoncé.
Supposons $s^{[n]}=\dfrac{p_n}{q_n}$, donc $s^{[n+1]}=s^{[n]}*s=\dfrac{s^{[n]}+s}{1-s^{[n]}s}=\dfrac{\frac{p_n}{q_n}+s}{1-\frac{p_n}{q_n}s}=\dfrac{p_n+sq_n}{q_n-sp_n}$

b) $sq_{n+1}=sq_n-s^2p_n=p_{n+1}-p_n-s^2p_n=p_{n+1}-(1+s^2)p_n$.
$p_{n+2}=p_{n+1}+sq_{n+1}=2p_{n+1}-(1+s^2)p_n$.

c) (p_n) est une suite linéaire récurrente de deuxième ordre d'équation caractéristique, $r^2-2r-(1+s^2)=0$, de descriminant $\delta=s^2$ et de racines $r_1=1-s, etr_2=1+s$, donc $p_n=\lambda(1-s)^n+\mu(1+s)^n$ avec λ et μ constantes déterminées par les conditions initiales, $p_0=0, p_1=s$, donc $\lambda+\mu=0$ et $\lambda(1-s)+\mu(1+s)=s$, on trouve $\imath ambda=-\mu=-\dfrac{1}{2}$, donc $p_n=\dfrac{1}{2}((1+s)^n-(1-s)^n)$.
D'autre part $sq_{n+1}=p_{n+1}-(1+s^2)p_n$, donc $q_n=\dfrac{1}{s}(p_n-(1+s^2)p_{n-1})$, puis remplacer p_n, p_{n-1} par leurs expressions.

d) Simple calcul, en utilisant $s^{[n]}=\dfrac{p_n}{q_n}$.

4) D'abord $\forall x\in\mathbb{R}$, il est clair que $\mathrm{th}x\in I$, donc $\mathrm{th}:\mathbb{R}\longrightarrow I$.
D'autre part, $\mathrm{th}x*\mathrm{th}y=\dfrac{\mathrm{th}x+\mathrm{th}y}{1-\mathrm{th}x\times\mathrm{th}y}=\dfrac{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}{1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\times\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}}=\dfrac{e^{2x+2y}-1}{e^{2x+2y}+1}=\mathrm{th}(x+y)$, donc th est un morphisme de $\mathbb{R}$ vers I.
Enfin $\forall y\in I$, $\mathrm{th}x=y\Longleftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=y\Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$, donc $\forall y\in I$ l'équation $\mathrm{th}x=y$ admet une unique solution, donc th est bijective, d'où th est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ vers I.

5) $\mathrm{th}(2x)=\mathrm{th}(x+x)=\mathrm{th}x*\mathrm{th}x=s^{[2]}=\dfrac{p_2}{q_2}$ où $s=\mathrm{th}x$, dans le cas général $\mathrm{th}(nx)=s^{[n]}=\dfrac{p_n}{q_n}$.