www.chez.com/myismail©2002

MPSI 1
CPGE Agadir

Contrôle 1
Samedi le 28 – 09 – 2002
Durée : 1h
Programme : Théorie des ensembles

Définition :

Soit $n \in IN^*$ **on appelle permutation de** $[|1,n|] = \{1,2,..,n\}$ **toute bijection de** $[|1,n|]$ **dans lui même, l'ensemble de ces permutations est noté** S_n, **si** $f \in S_n$ **on appelle support de** f **l'ensemble** $supp(f) = \{p \in [|1,n|]/f(p) \neq p\}$

on définit sur S_n **la relation suivante** $g\Re f \Leftrightarrow supp(g) \subset supp(f)\ et\ \exists h \in S_n\ /\ supp(h) \cap supp(g) = \emptyset\ et\ f = goh$

on dit qu'une permutation f **est irréductible** $\forall g \in S_n\ g\Re f \Rightarrow g = f\ ou\ g = id_{[|1,n|]}$

Conseil:

On peut admettre des questions et les utiliser pour démontrer d'autres

Enoncé :

1. (**0.25 pts**) **donner** $supp(id_{[|1,n|]})$

2. (**0.25 pts**) **donner un exemple où** $supp(f) = \{1,3\}$ $où\ n = 5$

3. (**0.5 pts**) **soit** $f \in S_n$, **montrer que** $supp(f) = \emptyset \Rightarrow f = id_{[|1,n|]}$ **en déduire que** $id_{[|1,n|]}$ **est irréductible**

4. (**1 pt**)**donner un exemple d'une permutation irréductible autre que** $id_{[|1,n|]}$

5. (**1,5 pts**) **soit** $(g,h) \in S_n^2\ /\ supp(g) \cap supp(h) = \emptyset$ **montrer que** $\forall x \in [|1,n|]$ $x \in supp(h) \Rightarrow g(h(x)) = h(x)$

6. (**1 pt**) **soit** $(g,h) \in S_n^2$ **en déduire que** $supp(g) \cap supp(h) = \emptyset \Rightarrow hog = goh$

7. (**1,5 pts**)**soit** $(g,f) \in S_n^2/$ **gRf montrer que** $supp(f)=supp(g) \cup supp(h)$(**où** h **la permutation citée dans la définition**).

8. (**1 pt**)**En déduire que** $\Re$ **est une relation d'ordre sur** S_n

9. (**1pt**)**Montrer que** $\forall f \in S_n\ \exists p \in IN^*$ **et** $\exists g_1, g_2, .., g_p$ **permutations de** $[|1,n|]$ **irréductibles telles que** : $f = g_1 o g_2 o..o g_p$

10. (**0.5 pts**) **A quel notions connus pour** IN **ressemblent la relation** $\Re$ **et les permutations irréductibles**.