

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle permutation de $[[1, n]] = \{1, 2, \dots, n\}$ toute bijection de $[[1, n]]$ dans lui même, l'ensemble de ces permutations est noté S_n , si $f \in S_n$ on appelle support de f l'ensemble $\text{supp}(f) = \{p \in [[1, n]] / f(p) \neq p\}$

on définit sur S_n la relation suivante $g \mathfrak{R} f \Leftrightarrow \text{supp}(g) \subset \text{supp}(f)$ et $\exists h \in S_n / \text{supp}(h) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$ et $f = goh$

on dit qu'une permutation f est irréductible $\forall g \in S_n g \mathfrak{R} f \Rightarrow g = f$ ou $g = id_{[[1, n]]}$

Conseil:

On peut admettre des questions et les utiliser pour démontrer d'autres

Enoncé :

1. (0.25 pts) donner $\text{supp}(id_{[[1, n]]})$
2. (0.25 pts) donner un exemple où $\text{supp}(f) = \{1, 3\}$ où $n = 5$
3. (0.5 pts) soit $f \in S_n$, montrer que $\text{supp}(f) = \emptyset \Rightarrow f = id_{[[1, n]]}$ en déduire que $id_{[[1, n]]}$ est irréductible
4. (1 pt) donner un exemple d'une permutation irréductible autre que $id_{[[1, n]]}$
5. (1.5 pts) soit $(g, h) \in S_n^2 / \text{supp}(g) \cap \text{supp}(h) = \emptyset$ montrer que $\forall x \in [[1, n]]$
 $x \in \text{supp}(h) \Rightarrow g(h(x)) = h(x)$
6. (1 pt) soit $(g, h) \in S_n^2$ en déduire que $\text{supp}(g) \cap \text{supp}(h) = \emptyset \Rightarrow hog = goh$
7. (1.5 pts) soit $(g, f) \in S_n^2$ gRf montrer que $\text{supp}(f) = \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)$ (où h la permutation citée dans la définition).
8. (1 pt) En déduire que \mathfrak{R} est une relation d'ordre sur S_n
9. (1 pt) Montrer que $\forall f \in S_n \exists p \in \mathbb{N}^*$ et $\exists g_1, g_2, \dots, g_p$ permutations de $[[1, n]]$ irréductibles telles que $f = g_1 o g_2 o \dots o g_p$
10. (0.5 pts) A quel notions connus pour \mathbb{N} ressemblent la relation \mathfrak{R} et les permutations irréductibles.