

Problème

Dans tout ce problème $(A, +, \times)$ désigne un anneau **non nul commutatif et intègre**.

On notera 0 l'élément nul de A et 1 son élément unité.

PARTIE I

Une partie I de A est dite un idéal de A si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I, +) \text{ est un sous groupe de } (A, +) \\ \forall a \in A \quad \forall x \in I \quad ax \in I \end{array} \right.$$

- 1) Montrer que A et $\{0\}$ sont deux idéaux de A .
- 2) Soit I un idéal de A , montrer que : $[I = A \Leftrightarrow 1 \in I]$
- 3) Montrer que si A est un corps alors les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A .
- 4) Pour $x \in A$, on pose $xA = \{xy \mid y \in A\}$
 - a) Montrer que $\forall x \in A \setminus \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x^n A$ est un idéal de A .
 - b) En déduire que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux alors A est un corps.
- 5) Montrer que les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les parties de \mathbb{Z} de la forme $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE II

Définition : Soit I un idéal de A .

- (i) On dit que I est premier si : $\forall x, y \in A \quad [xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I]$
- (ii) On dit que I est maximal si pour tout idéal J de A $[I \subset J \Rightarrow J = I \text{ ou } J = A]$

- 1) Montrer que si A est un corps alors $\{0\}$ est un idéal premier et maximal de A .
- 2) Montrer que si tous les idéaux de A sont premiers alors A est un corps.
- 3) Soit I un idéal de A et $a \in A \setminus I$.
 - a) Montrer que $I + aA$ est un idéal de A contenant I strictement.
 - b) En déduire que si I est maximal alors I est premier.
- 4) Montrer que les idéaux premiers de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont les parties de \mathbb{Z} de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n = 0$ ou n est un nombre premier.

PARTIE III

Soit I un idéal de A , on pose : $\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \quad x^n \in I\}$

- 1) Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A . (appelé radical de I).
- 2) Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
- 3) a) Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
b) Montrer que $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}$.

EXERCICE

Soit A un entier qui n'est pas un carré parfait. (c'est à dire : $A \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad A \neq k^2$)

Soient les ensembles : $G = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 - Ay^2 = 1\}$

$$\begin{aligned}
 H &= \{x + y\sqrt{A} \text{ tq } (x, y) \in G\} \\
 G_0 &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \text{ tq } x^2 - Ay^2 = 1\} \\
 H_0 &= \{x + y\sqrt{A} \text{ tq } (x, y) \in G_0\}
 \end{aligned}$$

- 1) Justifier que $G \neq \emptyset$.
- 2) Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, montrer que :
 $[a + b\sqrt{A} = c + d\sqrt{A}] \Rightarrow [a = c \text{ et } b = d]$
 (On commencera par montrer que $\sqrt{A} \notin \mathbb{Q}$)
- 3) Montrer que H est stable par la multiplication.
- 4) Montrer que (H, \times) est un groupe abélien.
- 5) Soient $(x, y), (x', y') \in G$, on pose : $(x, y) * (x', y') = (a, b) \in G$ tel que :
 $(x + y\sqrt{A})(x' + y'\sqrt{A}) = a + b\sqrt{A}$.
- a) Justifier que $*$ est une loi de composition interne sur G .
- b) Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien isomorphe au groupe (H, \times) .
- 6) Montrer que G_0 est un sous groupe de G et H_0 est un sous groupe de H .