$\overbrace{\underbrace{\textit{Problème}}}$

Dans tout ce problème $(A,+,\times)$ désigne un anneau **non nul commutatif et intégre**.

On notera 0 l'élément nul de A et 1 son élément unité.

$\overleftrightarrow{\textbf{PARTIE I}}$

Une partie I de A est dite un idéal de A si :

$$\begin{cases} (I,+) \text{ est un sous groupe de } (A,+) \\ \forall a \in A \quad \forall x \in I \quad ax \in I \end{cases}$$

1) Montrer que A et $\{0\}$ sont deux idéaux de A.

2) Soit I un idéal de A, montrer que : $[I = A \Leftrightarrow 1 \in I]$

3) Montrer que si A est un corps alors les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.

4) Pour $x \in A$, on pose $xA = \{xy \quad / \quad y \in A\}$

a) Montrer que $\forall x \in A\backslash\{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x^n A$ est un idéal de A.

b) En déduire que si A n'a qu'un nombre fini d'idéaux alors A est un corps.

5) Montrer que les idéaux de $(\mathbb{Z},+,\times)$ sont les parties de $\mathbb{Z}$ de la forme $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\overleftrightarrow{\textbf{PARTIE II}}$

Définition : Soit I un idéal de A.

(i) On dit que I est premier si : $\forall x,y \in A \quad [xy \in I \Rightarrow x \in I \quad \text{ou} \quad y \in I]$

(ii) On dit que I est maximal si pour tout idéal J de A $[I \subset J \Rightarrow J = I$ ou $J = A]$

1) Montrer que si A est un corps alors $\{0\}$ est un idéal premier et maximal de A.

2) Montrer que si tous les idéaux de A sont premiers alors A est un corps.

3) Soit I un idéal de A et $a \in A\backslash I$.

a) Montrer que $I + aA$ est un idéal de A contenant I strictement.

b) En déduire que si I est maximal alors I est premier.

4) Montrer que les idéaux premiers de $(\mathbb{Z},+,\times)$ sont les parties de $\mathbb{Z}$ de la forme $n\mathbb{Z}$, avec $n = 0$ ou n est un nombre premier.

$\overleftrightarrow{\textbf{PARTIE III}}$

Soit I un idéal de A, on pose : $\sqrt{I} = \{x \in A \quad \text{tq} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x^n \in I\}$

1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A. (appelé radical de I).

2) Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

3) a) Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

b) Montrer que $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I+J}$.

$\overbrace{\underbrace{\textbf{EXERCICE}}}$

Soit A un entier qui n'est pas un carré parfait. (c'est à dire : $A \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ $A \neq k^2$)

Soient les ensembles : $G = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad tq \quad x^2 - Ay^2 = 1\}$

$$H = \{x + y\sqrt{A} \quad tq \quad (x,y) \in G\}$$
$$G_0 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad tq \quad x^2 - Ay^2 = 1\}$$
$$H_0 = \{x + y\sqrt{A} \quad tq \quad (x,y) \in G_0\}$$

1) Justifier que $G \neq \emptyset$.

2) Soient $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, montrer que :

$[a + b\sqrt{A} = c + d\sqrt{A}] \Rightarrow [a = c$ et $b = d]$

(On commencera par montrer que $\sqrt{A} \notin \mathbb{Q}$)

3) Montrer que H est stable par la multiplication.

4) Montrer que $(H,\times)$ est un groupe abélien.

5) Soient $(x,y),(x',y') \in G$, on pose : $(x,y) * (x',y') = (a,b) \in G$ tel que :

$(x + y\sqrt{A})(x' + y'\sqrt{A}) = a + b\sqrt{A}$.

a) Justifier que $*$ est une loi de composition interne sur G.

b) Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien isomorphe au groupe $(H,\times)$.

6) Montrer que G_0 est un sous groupe de G et H_0 est un sous groupe de H.