# DL Bis : *Structures.*

**MPSI-Maths.**
**Mr Mamouni** : *myismail1@menara.ma*



**Exercice 1.** *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixe, sur $\mathbb{R}$, on définit la LCI suivante :*

$$x.y = a(x+y) + xy + b$$

***1)*** *Montrer que . admet un élément neutre si et seulement si $a^2 = a + b$, exprimer alors cel élément neutre en fonction de $a$.*
*On suppose dans la suite cette condition réalisée.*

***2)*** *Montrer alors que . est associative.*

***3)*** *Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $x$ est inversible si et seulement si $x \neq -a$, exprimer alors son inverse en fonction de $a, x$ et $b$.*

***4)*** *Montrer que $(\mathbb{R} \setminus \{-a\}, .)$ est un groupe, isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.*
*Indication : Remarquer que $x.y + a = (x+a) \times (y+a)$.*

**Exercice 2.** ***Anneau de Boole.***
*Soit $A$ un anneau, vérifiant la propriété suivante : $x^2 = x, \quad \forall x \in E$, on dit que c'est un anneau booléen.*

***1)*** *Montrer que $\forall x \in E, \quad 2x = 0_A$.*

***2)*** *En déduire que $A$ est commutatif.*

***3)*** *Vérifier que $\forall (x,y) \in A^2, \quad xy(x+y) = 0_A$.*
*En déduire que si $A$ est intégre alors card$(A) \leq 2$.*

***4)*** *Sur $A$, on définit la relation binaire suivante : $x\mathcal{R}y \iff xy = x$*
*Montrer que c'est une relation d'ordre.*

$\boxed{\text{Fin.}}$