DL 2 : *Nombres et suites réelles*

A rendre le: Lundi 01 Novembre 2004

Problème 1:

Rappel : Un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ est une partie H de $\mathbb{R}$ verifiant : $0 \in H$ et $\forall (x,y) \in H^2$ on a : $x - y \in H$.

On se propose dans ce problème de chercher la forme générale des sous groupes de $(\mathbb{R},+)$. Dans tout le probléme H désigne un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$ et $a = \inf(H \cap \mathbb{R}^{+*})$.

1. Montrer que : $H \cap \mathbb{R}^{-*} \neq \emptyset \Longleftrightarrow H \cap \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$.
2. En deduire que a existe.
3. On suppose dans cette question que : $a \neq 0$, et on veut montrer que $H = a\mathbb{Z}$.
   (a) On suppose que : $a \notin H$.
      i. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que : $\exists (x,y) \in H^2$ tel que : $x \neq y$ et vérifiant : $(a < x < a + \varepsilon$ et $a < y < a + \varepsilon)$.
      ii. En choisissant ε convenable tirer une contradiction.
   (b) En deduire que : $a\mathbb{Z} \subset H$.
   (c) Enoncez le théorème de la division euclidienne sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit $x \in H$, utiliser la question précèdente pour montrer que : $\exists q \in Z$ tel que : $x = aq$, conclure que : $H = aZ$.
4. On suppose dans cette question que : $a = 0$ et on veut démontrer que : H est dense dans $\mathbb{R}$.
   (a) Rappeler la definition d'une partie dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que : $x < y$, montrer que : $\exists b \in H$ tel que : $0 < b < y - x$.
   (c) En deduire que : $x < E\left(\frac{y}{b}\right) b < y$. Conclure.
5. Applications :
   (a) Montrer que : $\mathbb{Z}\left(\sqrt{2}\right) = \{a + b\pi \text{ tel que : } (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ est une sous groupe de $(\mathbb{R},+)$, puis en déduire qu'il est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont denses dans $[-1,1]$. En déduire que ces suites ne peuvent pas converger.

Problème 2:

on appelle *suite recurrente lineaire* toute suite (a_n) definie a l'aide d'une relation de type : $\begin{cases} u_0 = \alpha, u_1 = \beta \\ u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ où a, b, α, β des reéls donnés et fixés dans tout le probléme.
On se propose de trouver la fomre générale de telles suites.
On considére l'équation caractéristique : $x^2 - ax - b = 0$ (*), $\Delta = \sqrt{a^2 + 4b}$ son déscriminant.

1. On suppose $\Delta > 0$ et soient r_1, r_2 les solutions réelles de (*), λ, μ vérifiant le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = \beta \end{cases}$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
   (b) Trouver l'expression de la suite de *Fibonacci* : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

2. On suppose $\Delta = 0$ et soient r la solutions réelle de (*), λ, μ vérifiant le système : $\begin{cases} \lambda = \alpha \\ (\lambda + \mu)r = \beta \end{cases}$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$.
   (b) Trouver l'expression de la suite $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

3. On suppose $\Delta < 0$ et soient $re^{i\theta}$ une solution complexe de (*). λ, μ vérifiant le système : $\begin{cases} \lambda = \alpha \\ \lambda r\cos(\theta) + \mu r\sin(\theta) = \beta \end{cases}$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = r^n\cos(n\theta) + r^n\sin(n\theta)$.
   (b) Trouver l'expression de la suite : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = -1 \\ 4u_{n+1} = -2u_n - u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$
   (c) Résoudre le système suivant d'inconnues, $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $\begin{cases} -2\cos(\theta)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2\cos(\theta)x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} - 2\cos(\theta)x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta)x_n = 0 \end{cases}$

   où θ un réel fixe.

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca