MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Libre N°3

A rendre Jeudi le:28-Novembre-2002

Théme:*Suites recurrentes*

Probléme:

soit $(a_n) \in IR^{IN}$, on pose $b_n = a_n + 2a_{n+1}, \forall n \in IN$

1. Montrer que $b_n \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$.
2. Montrer que b_n converge$\Rightarrow$ a_n converge.Preciser la limite de a_n en fonction de celle de b_n .

   Dans toute la suite du probléme on pose : $u_0 = u_1 = \frac{3}{2}, u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n u_{n+1}}$,
3. Quelle est la limite eventuelle de (u_n).
4. Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $\frac{1}{3} \leq u_{n+1} - u_n \leq 1$
5. On pose dans cette question $a_0 = u_0, a_n = u_n - u_{n-1}, \forall n \in IN^*, b_n = a_n + 2a_{n+1}, \forall n \in IN$
   - **a**. Montrer que b_n converge ,calculer sa limite , en deduire celle de a_n
   - **b**. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$.
   - **c**. Donner un equivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} b_k$, en deduire que : $u_n \sim \frac{2n}{3}$.

   On admet dans la suite que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.
6. On pose dans cette question $a_n = u_n - \frac{2n}{3}, \forall n \in IN, b_n = a_n + 2a_{n+1}, \forall n \in IN$
   - **a**. Donner un equivalent simple de b_n
   - **b**. Determiner $\lim\limits_{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$ puis $\lim\limits_{+\infty} a_n$.
   - **c**. Donner un equivalent simple de a_n

Exercice :*DS* 2000-2001

On pose : $u_0 = u_1 = 1, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \forall n \in IN$

1. Montrer que : $\forall n \in IN, u_n \geq 1$.
2. On pose :$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1, \forall n \in IN$
   - **a**. Montrer que $v_{n+2} = \frac{v_n + v_{n+1}}{2(2+v_{n+2})}$
   - **b**. En deduire que : $|v_{n+2}| \leq \frac{|v_n| + |v_{n+1}|}{3}, \forall n \in IN$
3. On pose $x_0 = |v_0|, x_1 = |v_1|, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{3}, \forall n \in IN$.
   - **a**. Montrer que: $|v_n| \leq x_n \leq (0,8)^n, \forall n \in IN$.
   - **b**. En deduire:$\lim\limits_{+\infty} x_n$.