Devoir Libre 3 : *Suites Réelles*

A rendre Samedi 22 Novembre 2003

Dans ce probléme, n désigne un entier naturel, a un réel positif.On note $u_n(a)$ l'intégrale : $\dfrac{\int_0^a e^{-x}x^n dx}{n!}$.

PARTIE 1.

---

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\forall a \in \mathbb{R}^+ : u_n(a) - u_{n-1}(a) = -\dfrac{e^{-a}a^n}{n!}$.
2. Calculer $u_0(a)$ et déterminer, si elle existe, $lim u_0(a)$ quand $a \longrightarrow +\infty$
3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la fonction $u_n(a)$ admet pour limite 1 quand a tend vers $+\infty$.

   On posera pour tout n entier naturel, et pour tout a réel positif, $v_n(a) = 1 - u_n(a)$.
4. Montrer que pour tout a réel positif et pour tout n entier naturel : $v_{n+1}(a) - v_n(a) = \dfrac{e^{-a}a^{n+1}}{(n+1)!}$, $\quad v_n(a) = e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a^k}{k!}$, $\quad v_{n+1}(a) - v_n(a) = \int_a^{a+1}\dfrac{e^{-x}x^n}{n!}dx$.

PARTIE 2.

Dans la suite du problème, on note pour tout n entier naturel, $w_n = v_n(n) et t_n = u_n(n)$.

1. Justifier : $\forall n \in \mathbb{N} : w_n + t_n = 1$.
2. Etudier sur $\mathbb{R}^+$ les variations de la fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$.
3. Montrer que : $\int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}x^n}{n!}dx \geq \dfrac{(n+1)^n e^{-n-1}}{n!}$.
4. Montrer que : $w_n - w_{n+1} = -v_{n+}(n+1) + v_n(n+1) + \int_n^{n+1}\dfrac{e^{-x}x^n}{n!}dx$.
5. Déduire de ce qui précéde que la suite (w_n) est decroissante.
6. Justifier l'existence de $L = lim(w_n)$ et montrer que $L \in [0, l[$.
7. Montrer que la suite (t_n) converge vers un réel l vérifiant $l + L = 1$.

PARTIE 3.

Dans cette partie, on se propose de montrer que $L \geq \frac{1}{2}$. On considère la fonction f définie pour $x \in [0, l[$ par $f(x) = ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x$.Pour tout n entier naturel, et pour tout réel x , on note enfin $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0, l]$, on a : $f(x) > 0$.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul et pour tout x positif,$f_n(n+x) - f_n(n-x)$ a le même signe que : $e^{-x} - \left(\dfrac{1-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n$.

3. Déduire de ce qui précéde que pour tout $x \in [0, n]$, on a : $f_n(n+x) \geq f_n(n-x)$.
4. A l'aide de deux changements de variables, montrer que : $\int_n^{2n} f_n(t)dt - \int_0^n f_n(t)dt = \int_0^n (f_n(n+u) - f_n(n-u))du$
5. Déduire des questions précédentes que : $\int_n^{2n} f_n(t)dt - \geq \int_0^n f_n(t)dt$,puis que $w_n \geq t_n$ enfin que $L \geq \frac{1}{2}$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc