DS 2 : *Suites réelles*

Mardi 09 Novembre 2004

Durée : *3 heures*

Problème 1:

Proportion des applications à zéro ou un seul point fixe.

Préambule :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [|1,n|] \longrightarrow [|1,n|]$, on appelle point fixe de f tout entier $i \in [|1,n|]$ tel que : $f(i) = i$. On dit que f est un dérangement si f est bijective et n'admet aucun point fixe.

Pour tout $k \in [|0,n|], a_{n,k}$ désignera le nombre total d'applications $f : [|1,n|] \longrightarrow [|1,n|]$ qui admettent exactement k points fixes, et $d_{n,k}$ désignera le nombre total de bijections $f : [|1,n|] \longrightarrow [|1,n|]$ qui admettent exactement k points fixes.

On appelle dérangement de $[|1,n|]$, toute bijection de $[|1,n|]$ vers $[|1,n|]$, sans points fixes et on pose enfin $d_n = d_{n,0}$ leur nombre total.

1. (0.75 pts) Justifier l'égalité suivante : $n^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}$.
2. (0.75 pts) Soit $f : [|1,n|] \longrightarrow [|1,n|]$ une application qui admet exactement k points fixes, et $i \in |1,n|]$ qui n'est pas fixe par f. Combien on a de choix pour $f(i)$? En déduire que $a_{n,k} = \mathcal{C}_n^k (n-1)^{n-k}$.
3. (0.75 pts) Montrer que : $a_{n,k+1} \leq a_{n,k} \quad \forall k \in [|1, n-1|]$.
4. (0.75 pts) Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} k a_{n,k} = n^n ; \sum_{k=0}^{n} (k-1) a_{n,k} = (n-1) n^{n-1} ; \sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 a_{n,k} = (n-1) n^{n-1}$.

   Indication : On pourra utiliser la formule du binôme de Newton ainsi que sa dérivée par rapport à x dans $(x+y)^n$, puis prendre x et y convenables pour conclure.
5. On pose $u_n = \dfrac{a_{n,0}}{n^n}, v_n = \dfrac{a_{n,1}}{n^n}$.
   (a) (0.5 pts) Quelle intérpretation probabilistique peut-on donner aux suites u_n et v_n ?

   (b) (0.5 pts) Démontrer que : $\forall x > 0$ tel que: $x \neq 0$ et $\forall n \geq 2$ on a $(1+x)^n > 1 + nx$ *(Inégalité de Bernouilli).*

   (c) (0.75 pts) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$.
   Indication : on pourra passer aux log.

   (d) (1.5 pt) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   Indication : Etudier les rapports $\frac{u_{n+1}}{u_n}, \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

   (e) (0.75 pts) En déduire que : $\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} v_n = e^{-1}$.

   (f) (0.75 pts) Donner une intérpretation probabilistiques du résultat précédent.

   (g) (0.75 pts) Donner un encadrement à 10^{-1} prés de leur limite commune L.

Problème 2:

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + u_n^2; u_0 = a > 0$.

Partie 1 : *Convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. (0.75 pts) Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. (1 pt) Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

Partie 2 : *Comportement asymptotique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n$.

1. (1 pt) Prouver que pour tout entier n de N : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.
   En déduire que quels que soient les entiers naturels p et n :
   $$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$
2. (1 pt) En déduire que quels que soient les entiers naturels k et n :
   $$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$
3. (1 pt) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée α .
4. (1.75 pts) Montrer que : $\forall n \in\ N, u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$.
   En passant à la limite sur k pour n fixé dans l'encadrement de la question 2 Partie 2, $\forall n \in N, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$.
   En déduire, lorsque n tend vers l'infini, l'équivalent suivant :
   $$u_n \sim \exp(\alpha 2^n).$$
5. (1 pt) On pose : $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :
   $$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n).$$
6. (1.75 pts) Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini :
   $$u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1).$$

<u>Source</u> : Concours Ecricome 2003 (Ecoles de commerce), option S.

FIN

Mamouni My Ismail

CPGE Med V-Casablanca