DS 3 : *Suites Réelles - Arithmétique*

Jeudi 27 Novembre 2003

Durée : 3 heures

Probléme 1:

La suite (u_n) de *Fibonacci* est définie par : $u_0 = 1; u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.*(0.5 pt)*
2. déduire pour $\lim_{n\to+\infty} u_n$? *(0.5 pt)*
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$. *(0.5 pt)*
4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$.
   (a) Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n.*(0.5 pt)*
   (b) Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*(0.5 pt)*
   (c) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.*(0.75 pt)*
   (d) En déduire que la suite (v_n) converge. Quelle est sa limite ?*(0.75 pt)*
5. Montrer que u_n s'écrit sous la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1, r_2 les solutions de l'équation $r^2 = r + 1$ et λ, μ deux constantes a trouver .*(0.75 pt)*
6. Retrouver le résultat de *4.d* .*(0.5 pt)*
7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n \in \mathbb{N}, u_n \wedge u_{n+1} = 1$.*(0.75 pt)*
8. Montrer que : $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^{*2} :, u_n \wedge u_m = u_{n\wedge m}$ *(0.75 pt)*
9. Une population de lapins posséde la propriéte suivante : chaque couple donne naissance a seul un couple ,ce couple ne devient productif qu'aprés deux mois.
   (a) Si un fermier commence au 1er mois par élever un seul couple,combien aurait-il de couple au 2éme,3éme,4éme,5éme mois ? *(0.75 pt)*
   (b) On note d_n le nombre total de couples de lapins que le fermier aurait au n *éme* mois .Montrer que $d_n = u_n$.*(1.25 pt)*

Probléme 2:

1. Soient u et v deux entiers naturels premiers entre eux.
   (a) Montrer que si uv est un carré alors u et v le sont aussi .*(0.5 pt)*
   (b) Montrer que $(2u) \wedge (2v) = 2$.*(0.25 pt)*
   (c) En déduire que *pgcd(u+v,u-v)* est égal a 1 ou 2 .*(0.25 pt)*
2. Montrer que : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^{*3} : pgcd(a^2,b^2,c^2) = pgcd(a,b,c)^2$.*(0.5 pt)*

Partie II : Triplets pythagoriciens.

Un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ tel que $abc \neq 0$ est dit pythagoricien si $a^2+b^2=c^2$.

1. Soit (a_0,b_0,c_0) un triplet pythagoricien .Montrer qu'il existe un entier k et 3 entiers *a,b* et c tels que : $a_0 = ka, b_0 = kb, c_0 = kc$ avec *pgcd(a,b,c)=1.(0.5 pt)*
2. Montrer que *pgcd(a,b)=pgcd(a,c)=pgcd(b,c)=1.(0.5 pt)*
3. Soeint les ensembles

   $A = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \quad tel \quad que \quad abc \neq 0, a^2+b^2=c^2, pgcd(a,b,c)=1\}$., $B = \{(r_1,r_2) \in \mathbb{Q}^2 : r_1^2+r_2^2=1\}$

   .Montrer que l'application $\begin{array}{c} \varphi : A \longrightarrow B \\ (a,b,c) \longmapsto \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \end{array}$ est bijective.*(0.5 pt)*
4. On considère le cercle C de centre *(0,0)* et de rayon 1.Donner son équation cartésienne .Calculer l'intersection *C'=C-(-1,0)* et de la droite *y=t(x+1)*.(Faire un dessin).On note *(x(t),y(t))* cette intersection .Donner l'ensemble I de $\mathbb{R}$ sur lequel *x(t)* et *y(t)* sont strictement positifs .*(0.5 pt)*
5. Soit $t \in I$ .Montrer que si *x(t)* et *y(t)* sont rationnels $\Longleftrightarrow$ t est rationnel .*(0.5 pt)*
6. *Paramétrage des triplets pythagoriciens* :En déduire que tout triplet pythagoricien *(a,b,c)* s'écrit sous la forme : $a = d(u^2-v^2) \quad b = 2duv \quad c = d(u^2+v^2)$ avec *d,u,v* des entiers naturels non nuls , *u>v* , u et v premiers entre eux et non tous les deux impairs .*(1.25 pt)*

Partie III : Equation diophantienne et Théorème de Fermat :

On s'intéresse a l'équation diophantienne $x^4 - y^4 = z^2$ (*) .que l'on cherche a résoudre dans $\mathbb{N}$ .On suppose que *(x,y,z)* est une solution formée par des entiers tous strictement positifs .

1. Montrer qu'il existe un triplet (x_0,y_0,z_0) solution de (*) avec $pgcd(x_0,y_0,z_0) = 1$ .Montrer que $pgcd(x_0,y_0) = pgcd(y_0,z_0) = pgcd(z_0,x_0) = 1$.*(0.5 pt)*
2. Montrer que z_0 est impair (*Indication* : étudier suivant la parité de y_0, si y_0 impair travailler *modulo 4*) *(0.5 pt)*
3. On suppose x_0 impair .Paramétrer le triplet pythagoricien (z_0, y_0^2, x_0^2) , puis calculer le produit $x_0^2 y_0^2$ .En déduire que (*) admet une solution (x_1,y_1,z_1) avec $x_1 < x_0$ *(0.75 pt)* .
4. On suppose x_0 pair .
   (a) Paramétrer le triplet pythagoricien (z_0, y_0^2, x_0^2) par u et v premiers entre eux tels que v pair , u et $\frac{v}{2}$ sont des carrés .(*Indication* : Considérer $\left(\frac{y_0}{2}\right)^2$). *(0.75 pt)*
   (b) En déduire l'existence de α, β tels queă : $x_0^2 = \alpha^2 + 4\beta^4$.*(0.75 pt)*
   (c) Paramétrer le triplet pythagoricien $(\alpha^2, 2\beta^2, x_0)$ et montrer qu'ils existent p et q tels queă : $\alpha^2 = p^4 - q^4$.*(0.5 pt)*
   (d) En déduire que (*) admet une solution (x_1,y_1,z_1) avec $x_1 < x_0$.*(0.5 pt)*
5. En déduire le grand théorème de *Fermat* pour *n=4* : l'équation $x^4+y^4=z^4$ n'admet pas de solutions (x,y,z) telle que $xyz \neq 0$. *(0.75 pt)*
6. Montrer que l'aire d'un triangle rectangle a cotés rationnels n'est pas un carré dans $\mathbb{Q}$. *(1.5 pt)*

FIN