DS 3 : *Suites Réelles - Arithmétique*

Jeudi 27 Novembre 2003

Corrigé

Probléme 1:

1. Montrer que $u_n \geq 0$ par récurrence forte .
2. Montrer que $u_n \geq n$ par récurrence forte .
3. Poser $a_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ et prouver la relation $a_n = -a_{n-1}$.
4. .
   (a) Facile .
   (b) $v_{n+2} - v_n = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+2}} = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$.
   (c) $x_{n+1} - x_n = v_{2n+2} - v_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n} u_{2n+2}} = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+2}} > 0$.
   $$y_{n+1} - y_n = v_{2n+3} - v_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+1} u_{2n+3}} = -\frac{1}{u_{2n+1} u_{2n+3}} < 0$$
   .Enfin, $y_n - x_n = v_{2n+1} - v_{2n} = \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} - \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \frac{u_{2n+2} u_{2n} - u_{2n+1}^2}{u_{2n} u_{2n+1}} = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+1}} \longrightarrow 0$
   (d) Vu en TD .Notons $l = lim(v_n)$ $\quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$ donc $l > 0, l = 1 + \frac{1}{l}$ c-a-d $l^2 = l + 1$ d'où $l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
5. Par récurrence forte .A l'aide des conditions initiales $u_0 = \lambda + \mu = 0 \quad , u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = 1$ on trouve les constantes .
6. On note $r_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ donc $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}}{\lambda r_1^n + \mu r_2^n}$ on factorise par r_1^{n+1} en haut et par r_1^n en bas et tend n vers $+\infty$
7. Récurrence forte .
8. Récurrence double .
9. .
   (a) 1,2,3,5 .
   (b) Par récurrence forte .Au n+2 éme mois les lapins du n+1 éme restent encore en vie et tous ceux qui étaient au n éme deviennent productifs car ils ont déjà 2 mois .

Probléme 2:

1. .
   (a) Utiliser le théoréme de la décomposition primaire .
   (b) $d = (2u) \wedge (2v) = 2$ il est pair ,or $\frac{d}{2}/u, \frac{d}{2}/v$ donc $\frac{d}{2} = 1$
   (c) *d=pgcd(u+v,u-v)* divise *2u,2v* donc divise leur *pgcd* égal à 2 .

2. Montrer d'abord que $x^2 \wedge y^2 = (x \wedge y)^2$ à l'aide du théoréme de la décomposition primaire puis $a^2 \wedge b^2 \wedge c^2 = (a^2 \wedge b^2) \wedge c^2 = (a \wedge b)^2 \wedge c^2 = ((a \wedge b) \wedge c)^2 = (a \wedge b \wedge c)^2$.

Partie II : Triplets pythagoriciens.

1. $k = pgcd(a_0, b_0, c_0)$
2. $d = a \wedge b \Longrightarrow d^2/a^2, d^2/b^2, d^2/c^2 = a^2 + b^2 d^2 = 1$ de méme $b \wedge c = c \wedge a = 1$.
3. Injection (facile) .Surjection :$\varphi^{-1}\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right) = \left(\frac{p_1q_2}{d}, \frac{p_2q_1}{d}, \frac{q_1q_2}{d}\right)$ où $d = pgcd(p_1q_2, p_2q_1, q_1q_2)$.
4. L'équation du cercle : $x^2 + y^2 = 1$ .A l'aide du dessin il est clair que $I = \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$
5. *x(t)* et *y(t)* sont rationnels $\Longrightarrow$ t est rationnel (évident)
   Réciproquement : $y = t(x+1), x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow (1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x =\in \left\{\frac{-t^2+1}{1+t^2}, -1\right\} \subset \mathbb{Q}$
6. $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \frac{a}{c} = cos(\theta), \frac{b}{c} = sin(\theta) \in \mathbb{Q}$ exprimer ensuite $cos(\theta), sin(\theta)$ en fonction de $tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et prendre $d = a \wedge b \wedge c$.

Partie III : Equation diophantienne et Théorème de Fermat :

1. Reprendre la démarche de la partie I .
2. D'aprés la question précédente parmi x_0, y_0, z_0 deux ne peuvent pas etre tous pairs puisque premiers entre eux,donc il y'en a deux imapirs et un pair ,le paramétrage du triplet z_0, y_0^2, x_0^2 montre que c'est y_0 qui est pair donc z_0, x_0 sont impairs .
3. .
4. .
   (a) $z_0 = u^2 - v^2, y_0^2 = 2uv, x_0^2 = u^2 + v^2$ car $d = pgcd(x_0, y_0, z_0) = 1$ on a u impair et v, y_0 pairs donc $\left(\frac{y_0}{2}\right)^2 = u\frac{v}{2}$ de plus $u \wedge v =$ donc $\frac{u}{2} \wedge v = 1$ et $\frac{u}{2}v$ est un carré donc $\frac{u}{2}, v$ sont des carrés .
   (b) $u = \alpha^2, \frac{u}{2} = \beta^2, x_0^2 = u^2 + v^2$.
   (c) $\alpha^2 = u'^2 - v'^2, 2\beta^2 = 2u'v', x_0 = u'^2 + v'^2$ avec $u' \wedge v' = 1$ donc $u'v' = \beta^2$ est un carré donc u', v' sont des carrés d'où $u' = p^2, v' = q^2$ et alors $\alpha^2 = p^4 - q^4$
   (d) $x_1 = p, y_1 = q, z_1 = \alpha$ avec $x_1 = p < p^4 = u'^2 < u'^2 + v'^2 = x_0$.
5. D'apres ce qui précéde si l'équation *diophantienne* admet une solution on peut encore construire une autre solution "plus petite" et ainsi de suite à la fin on aurait des solutions négatives donc cette équation ne peut pas avoir de solutions et en particulier l'équation de *Fermat* pour *n=4* ne peut pas en avoir aussi puisque c'est un cas particulier de l'équation *diophantienne* .
6. On peut supposer les cotés x, y, z dans $\mathbb{N}$ et premiers entre eux quitte a mulitpiler par le dénominateur commun puis diviser par le pgcd donc $x^2 + y^2 = z^2$ paramétrer le triplet x, y, z par u, v montrer que u, v sont des carrés et en déduire une solution de l'équation *diophantienne* ce qui n'est pas possible .

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc