CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Contrôle: *Suites numériques*

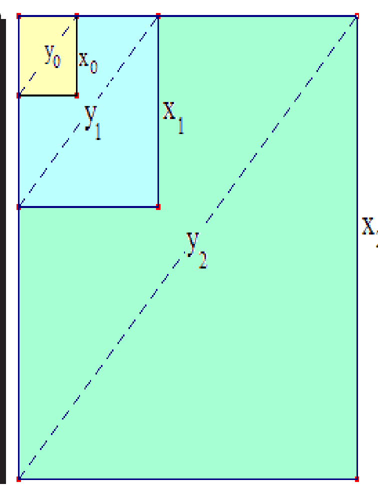
Mardi 17 Février 2009

Durée : 1heure

Blague du jour : **Chasse à l'ours : 1ère épisode.**

Une grosse société organise annuellement le concours du meilleur ingénieur de développement, du meilleur ingénieur de support et du meilleur ingénieur d'affaires. Cette année, les trois lauréats (un dans chaque catégorie) ont gagné un voyage sur le thème « chasse à l'ours au Canada » dont le but sera de ramener une peau d'ours.
L'ingenieur de développement arrive sur les lieux, dans une combinaison camouflée en Gore Tex. Il dispose d'un traîneau en aluminium et fibre de carbone de type tubulaire. De son sac isotherme étanche à 40 mètres, il sort un fusil avec jumelles de vision nocturne, véritable arme de guerre.
Fin prêt, il revient d'un stage de survie en milieu hostile. Il part à la chasse à l'ours le lendemain matin à 9 h.
Les organisateurs attendent toute la journée. Ils entendent un coup de feu vers 16 h, puis plus rien...
Á 18 h précise, l'ingénieur revient avec une peau d'ours soigneusement arrimée au traîneau.

Mathématicien du jour ***Thèon de Smyrne***
Théon de Smyrne est un maître d'école platonicien qui aurait vécu au IIe siècle, vers 130.
On lui attribue une *Exposition des connaissances mathématiques utiles à la lecture de Platon*, dont seuls des fragments sont actuellement connus. Il s'agit d'un traité d'arithmétique et de musique d'inspiration pythagoricienne, mais aussi d'un cours d'astronomie où on retrouve une démonstration de la rotondité de la Terre, qui s'appuie sur le calcul du volume de celle-ci et des des démonstrations du mouvement annuel du Soleil qui témoignent d'un haut niveau d'élaboration scientifique, en particulier la démonstration de l'équivalence de l'hypothèse de l'excentrique et de celle de l'épicycle



Mini-Problème :

Objectif : **Calcul approché de la racine carré d'un nombre réel, méthode de *Théon de Smyrne.***
Principe **: Considérons une suite de carrés emboîtés de côté $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de diagonales $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Les côtés appelés latéraux sont obtenus en ajoutant à la mesure du côté précédent la mesure de sa diagonale (voir figure ci-dessus). Plus précisement, on a :**

$x_{n+1} = x_n + y_n$. **On suppose dans tout le problème que** $x_0 = y_0 = 1$

Partie I : Cas particulier, calcul approché de $\sqrt{2}$

1) **Montrer que** $y_{n+1} = y_n + 2x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$
2) **On pose** $r_n = \dfrac{y_n}{x_n}$
   Montrer que $r_{n+1} = \dfrac{r_n + 2}{r_n + 1}$**, puis que** $\lim\limits_{+\infty} r_n = \sqrt{2}$.
   Indication : remarquer que (r_n) **est une suite numérique récurrente.**
3) **Donner les 5 premiers termes de la suite** (r_n).

Partie II : Cas général, calcul approché de $\sqrt{A}$, où $A > 0$.

Dans toute la suite on pose $\begin{cases} x_0 = y_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + y_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ y_{n+1} = y_n + Ax_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) **Prouver que les suites** (x_n) **et** (y_n) **sont strictement croissantes et divergentes.**
2) **Pour** $n \geq 2$**, justifier que** $x_n > (1 + A)x_{n-2}$ **; en déduire** $x_{2n} > (1 + A)^n$ **pour tout** $n \geq 1$.
3) **Vérifier, par un calcul élémentaire, que :**
$$y_{n+1}^2 - Ax_{n+1}^2 = (1 - A)(y_n^2 - Ax_n^2)$$
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$**, on a :**
$$y_n^2 - Ax_n^2 = (1 - A)^{n+1}$$
4) **On pose** $r_n = \dfrac{y_n}{x_n}, u_n = r_{2n}$ **et** $v_n = r_{2n+1}$.
   a) **Montrer que l'on a :** $r_{n+1} = \dfrac{r_n + A}{r_n + 1}$.
   b) **Montrer que** (u_n) **et** (v_n) **sont adjacentes.**
   c) **En déduire que** $\lim\limits_{+\infty} r_n = \sqrt{A}$.

Partie III : Majoration de l'erreur.

1) **Étudier sur son domaine de définition la fonction** $f(x) = \dfrac{x + A}{x + 1}$.
2) **On suppose que** $0 < A < 1$**, montrer que** $|v_n - \sqrt{A}| < \dfrac{(1 - A)^{2n+1}}{2Ax_{2n}^2}$**, en déduire que**
$$|v_n - \sqrt{A}| < \frac{1 - A}{2A}\left(\frac{1 - A}{1 + A}\right)^{2n}$$
3) **On suppose que** $1 < A$**, montrer que** $|v_n - \sqrt{A}| < \dfrac{(A - 1)^{2n+1}}{2x_{2n}^2}$**, en déduire que**
$$|v_n - \sqrt{A}| < \frac{A - 1}{2}\left(\frac{A - 1}{A + 1}\right)^{2n}$$
4) **Combien de termes** v_n **faut-il calculer pour avoir une valeur approchée de** $\sqrt{3}$ **à** 10^{-4} **près.**
5) **Calculer les 5 premiers chiffres de** r_n **pour** $A = \sqrt{3}$.

Fin
Bonne chance