CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle: *Suites numériques*

Mardi 17 Février 2009

Durée : 1heure

Blague du jour : **Chasse à l'ours : 2ème épisode.**
Arrive l'ingénieur du support. Il n'a pas de traîneau, son vieux coupe-vent Microsoft prend un peu l'humidité mais sa casquette Computer Associates lui permettra de ne pas être ébloui le moment venu.
Son couteau suisse un peu rouillé lui sera fort utile pour dépecer l'animal. Son vieux fusil fonctionnait jusqu'à ce qu'il s'en serve comme manche de pioche il y a un mois dans son jardin.
Aujourd'hui, le canon est un peu plié. Voyant l'attirail de l'ingénieur de développement, il lui demande de le lui prêter, y parvient non sans quelques réticences, et part à la chasse, avec deux heures de retard, le lendemain matin... Les organisateurs l'attendent patiemment toute la journée, ainsi que le lendemain matin. A 11 h, ils entendent 18 coups de feu, en tir plus ou moins rapprochés.
Vers 19 h, l'ingénieur du support revient péniblement. Il a plié le fusil de l'ingénieur, abîmé le traîneau, déchire son coupe-vent...
Mais enfin, il a tout de même réussi à attacher tant bien que mal un ours blessé par un seul ricochet de balle sur le traîneau !

Mathématicien du jour ***Césaro***
Ernesto Cesàro (1859-1906) était un mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. Il propose une définition possible d'une suite divergente, connue aujourd'hui comme "Somme de Cesàro", donnée par la limite de la moyenne des sommes des termes partiels de la succession. En théorie des nombres, il est à l'origine du résultat suivant : Soit p et q deux nombres entiers choisis aléatoirement. La probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux est égale à 0,6.
Il fut professeur universitaire jusqu'à sa mort qui se produisit alors qu'il tenta de sauver son plus jeune fils Manlio qui était en train de se noyer.

Partie I : Cas particulier, calcul approché de $\sqrt{2}$

1) **D'après Phytagore, on a $2x_n^2 = y_n^2$, donc $y_{n+1} = \sqrt{2}x_{n+1} = \sqrt{2}(x_n + y_n) = x_n + 2y_n$.**

2) **On pose $r_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \dfrac{y_n + 2x_n}{y_n + x_n} = \dfrac{r_n + 2}{r_n + 1}$, après avoir factorisé dans le rapport par x_n.**

   Posons $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, on a $f(x) - x = \dfrac{2 - x^2}{x+1}$, donc $f(x) = x \Longleftrightarrow x = \sqrt{2}$ et $0 \leq x \leq \sqrt{2} \Longrightarrow 0 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$, comme $0 \leq x_0 = 1 \leq \sqrt{2}$, on en conclut alors que (x_n) est croissante et majorée par $\sqrt{2}$ donc converge vers l'unique point fixe de f qui est $\sqrt{2}$.

3) Les calculs en excel donnent les résultats suivants :

	A	B	C	D
1	n	Xn	Yn	Rn
2	0	1	1	1
3	1	2	3	1,5
4	2	5	7	1,4
5	3	12	17	1,416666667
6	4	29	41	1,413793103
7	5	70	99	1,414285714

Partie II : Cas général, calcul approché de $\sqrt{A}$, où $A > 0$.

1) On montrer d'abord par récurrence que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement positives, et par suite strictement croissantes vu les relations qui les lient. Si (x_n) converge, alors $\lim\limits_{+\infty} = 0$ puisque $x_{n+1} = x_n + y_n$, ce qui est impossible car (y_n) est strictement croissante et strictement positive. Avec un raisonnement analogue, on montre que (y_n) diverge.

2) On a $x_n = x_{n-1}+y_{n-1} = x_{n-2}+y_{n-2}+y_{n-1} = x_{n-2}+y_{n-2}+y_{n-2}+Ax_{n-2}$, donc $x_n-(1+A)x_{n-2} = 2y_{n-2} > 0$, puis on montre facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $x_{2n} > (1 + A)^n$ tenant compte de l'inégalité précédente et du fait que $x_0 = 1$.

3) Comme signalé par un calcul élémentaire, on vérifie que : $y_{n+1}^2 - Ax_{n+1}^2 = (1 - A)(y_n^2 - Ax_n^2)$, donc $y_n^2 - Ax_n^2$ est une suite géomètrique de raison $1 - A$ et de premier terme $1 - A$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $y_n^2 - x_n^2 = (1 - A)^{n+1}$.

4) a) Même raisonnement que celui fait dans la question 2) de la partie I.

b) Pour $A \neq 1$, on a $r_{n+1} = f(r_n)$, où $f(x) = \dfrac{x + A}{x + 1}$ avec $f(x)-x = \dfrac{A - x^2}{x + 1}$ et $f'(x) = \dfrac{A - 1}{(x + 1)^2}$.
On distingue alors trois cas :
- **$A = 1$, $r_n = 1$, $\forall n$.**
- **$0 < A < 1$, dans ce cas f est décroissante, donc $r_1 - r_0 = f(r_0) - r_0 > 0$ et $r_2 = f(r_1) < f(r_0) = r_1$, on montre alors par récurrence que $u_n = r_{2n}$ est croissante, $v_n = r_{2n+1}$ est décroissante, avec $r_{2n} < r_{2n+1}$, en particulier u_n est majorée par v_0 et v_n minorée par u_0, donc convergent toutes les deux vers l'unique point fixe $\sqrt{A}$ de $f \circ f$ car $r_{2n+2} = f\circ f(r_{2n})$ et $r_{2n+3} = f\circ f(r_{2n+1})$, donc $\lim\limits_{+\infty}(v_n-u_n) = 0$, donc u_n et v_n adjacentes.**
- **$A > 1$, dans ce f est croissante, donc r_n est monotone, sa monotonie dépond des premiers termes $r_0 = 1$ et $r_1 = \dfrac{A + 1}{2} \geq 1$, donc r_n est croissante, on vérifie par récurrence qu'elle est majorée par $\sqrt{A}$, point fixe de f, donc (r_n) converge vers $\sqrt{A}$.**

Partie III : Majoration de l'erreur.

1) On a déjà $f'(x) = \dfrac{A - 1}{(x + 1)^2}$, donc $f' \geq 0$ si $A \geq 1$ et $f' \leq 0$ si $A \leq 1$. Dans tous les cas $v_{n+1} = g(v_n)$ où $g = f\circ f$ est croissante, la monotonie de v_n dépond alors des deux premiers termes $v_0 = r_0 = 1$ et $v_1 = r_2$.

2) On suppose que $0 < A < 1$, comme c'est déjà démontré dans la partie II, dans ce cas v_n est décroissante vers $\sqrt{A}$, donc $v_0 = 1 \geq v_n \geq \sqrt{A}$. D'autre part $y_n^2 - Ax_n^2 = (1 - A)^{n+1}$, donc $r_n^2 - A = \dfrac{(1 - A)^{n+1}}{x_n^2}$, donc $r_n - \sqrt{A} = \dfrac{(1 - A)^{n+1}}{(r_n + \sqrt{A})x_n^2}$, en remplçant n par $2n$ on obtient : $v_n-\sqrt{A} = \dfrac{(1 - A)^{2n+1}}{(v_n + \sqrt{A})x_{2n}^2}$, de plus $1 \geq v_n \geq \sqrt{A}$, donc $1+\sqrt{A} \geq v_n \geq 2\sqrt{A} \geq 2A$, d'où $|v_n-\sqrt{A}| < \dfrac{(1 - A)^{2n+1}}{2Ax_{2n}^2}$, en enfin comme $x_{2n}\ (1 + A)^n$ on déduit que $|v_n - \sqrt{A}| < \dfrac{1 - A}{2A}\left(\dfrac{1 - A}{1 + A}\right)^{2n}$.

3) On suppose que $1 < A$, alors cette fois v_n est croissante vers $\sqrt{A}$, donc $v_0 = 1 \leq v_n \leq \sqrt{A}$. Or $v_n - \sqrt{A} = \dfrac{(1 - A)^{2n+1}}{(v_n + \sqrt{A})x_{2n}^2}$ et $2 < 1+\sqrt{A} \leq v_n + \sqrt{A}$, d'où $|v_n - \sqrt{A}| < \dfrac{(A - 1)^{2n+1}}{2x_{2n}^2}$, et finalement

comme $x_{2n}\,(1+A)^n$ **on déduit que** $|v_n - \sqrt{A}| < \dfrac{A-1}{2}\left(\dfrac{A-1}{A+1}\right)^{2n}$.

4) **Prenons** $A = 3 > 1$, **pour avoir une valeur approchée de** $\sqrt{3}$ **à** 10^{-4} **près, il suffit de choisir** n **tel que** $\dfrac{A-1}{2}\left(\dfrac{A-1}{A+1}\right)^{2n} = \dfrac{1}{4^n} \leq 10^{-4}$, **vrai pour** $n = 5$.

5) **Les calculs faits en Ecxel, donnent :**

n	x_n	y_n	r_n
0	1	1	1
1	2	4	2
2	6	10	1,666666667
3	16	28	1,75
4	44	76	1,727272727
5	120	208	1,733333333

Blague du jour : **Chasse à l'ours : Fin**

Arrive enfin l'ingénieur commercial, en costume trois pièces, son portable, sa carte Fréquence Plus Rouge en poche, son attaché-case à la main. Il n'a pas lu le dépliant du voyage. On lui explique quatre fois le but de sa mission. L'ingénieur support lui propose son matériel (c'est toujours mieux que rien). Il refuse tout en vrac et part à la chasse sur le champ.

Trois jours plus tard, les organisateurs n'ont aucune nouvelle de lui. Le soir, alors qu'ils désespèrent de le voir revenir, le commercial surgit d'un sous-bois, avec toute une horde d'ours affamés à 15 mètres derrière lui.

Il passe à leur hauteur (sans s'arrêter) en hurlant : « Voilà les ours, maintenant, démerdez-vous ! ! ! »

Fin
à la prochaine