CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

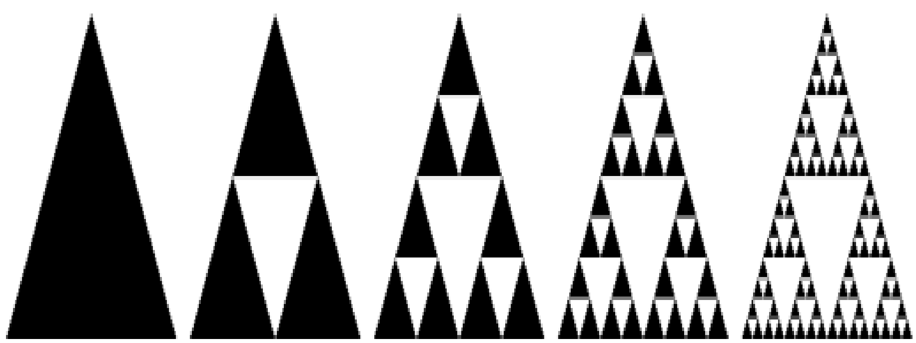
Contrôle 4 (08-09): *Structures algèbriques* *Suites numériques*

Lundi 2 Mars 2009

Durée : 2 heures

Blague du jour :
Ce sont trois taupins qui ont un DS de math le lundi à passer. Ils vont faire la fête toute la nuit du dimanche à l'occasion de l'anniversaire de l'un d'entre eux. Seulement, ils ne se réveillent pas le fameux lundi matin et vont voir mardi le professeur pour s'excuser. Ils lui demandent alors de ratrapper le lendemain matin en argumentant qu'ils ont crevé une roue sur le chemin du retour en guise d'excuse. Le professeur accepte finalement.
Les étudiants bossent toute la nuit et arrive le matin. Le prof les met dans des salles différentes et leur donne le sujets d'examen qui comporte deux questions.
La première est sur 5 points. Chacun la lit dans son coin et trouve ça tres facile. c'était : Quelle est la raison qui vous a empêchait de passer le DS prévu lundi ?
Après, ils tournent la page et la seconde question pour 95 points est : quelle roue a été crevée ?

Mathématicien du jour ***Sierpinski***
Waclaw Franciszek Sierpinski (1882-1969) était un mathématicien polonais, connu pour ses contributions à la théorie des ensembles, à la théorie des nombres, à la théorie des fonctions et à la topologie. Dans la théorie des ensembles, il apporte des contributions considérables sur l'axiome du choix et sur l'hypothèse du continu. Il a rédigé plus de 700 articles et 50 livres. Deux fractales bien connues portent son nom : le triangle de Sierpinski, le tapis de Sierpinski. Le logo de l'École Nationale des Ponts et Chaussées représente un triangle de Sierpinski au bout de la deuxième itération.



École des Ponts
ParisTech

Problème 1. **source : DS, PCSI, Faidherbe, Lille, France**

Dans cet exercice, on considère l'ensemble

$$\mathcal{H} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \right\}.$$

1. Rappeler la définition de la loi $+$ qui munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure usuelle de groupe.
2. L'ensemble $\mathcal{H}$ est-il un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$?
3. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$(x,y) \in \mathcal{H} \iff \exists t \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{c} x = 2(t + \frac{1}{t}) \\ \text{et} \\ y = (t - \frac{1}{t}) \end{array} \right.$$

   N.B. : on pourra remarquer que $e^{-u} = \frac{1}{e^u}$.

   (b) Soit F l'application de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathcal{H}$ définie par : $F(t) = \left(2(t + \frac{1}{t})\ ,\ (t - \frac{1}{t})\right)$.
   Montrer que F est bijective et préciser F^{-1}.
4. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{H}$ et $(x',y') \in \mathcal{H}$, on définit le couple $(X,Y) = (x,y) * (x',y')$ par :

$$X = \frac{xx'}{4} + yy' \text{ et } Y = \frac{xy' + x'y}{4}.$$

   (a) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{H}$.

   (b) Soient deux réels t et t' non nuls. Exprimer $F(t) * F(t')$ en fonction de $F(tt')$.

   (c) Montrer que $(\mathcal{H}, *)$ est un groupe abélien.
   On désignera par e l'élément neutre et, pour tout $m \in \mathcal{H}$, on notera m^{-1} le symétrique de m (pour la loi $*$).

   (d) Montrer que les groupes $(\mathcal{H}, *)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont isomorphes.
5. Soit (x,y), un élément de $\mathcal{H}$, et un entier $n \geq 2$. En utilisant astucieusement l'application F, donner une formule permettant de calculer directement $(x,y) * (x,y) * \cdots * (x,y)$ (n fois), élément que l'on pourra noter, sans ambiguité, $(x,y)^n$.
6. On fixe un élément c dans $\mathcal{H}$ et on considère l'application f définie par :

$$\forall m \in \mathcal{H},\ f(m) = c * m^{-1}.$$

   (a) Montrer que f est une involution de $\mathcal{H}$.

   (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur c pour que f soit un automorphisme du groupe $\mathcal{H}$.

Problème 2. **source : DS, TSI, Pr Ahrar (Mohammedia), France**

Partie I (Suites de Cauchy)

Définition :

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est dite de Cauchy si** :

$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\forall n\geq N\quad\forall p\in\mathbb{N}\quad|u_{n+p}-u_n|\leq\varepsilon$

Autrement dit si : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{p\in\mathbb{N}}|u_{n+p}-u_n|\right)=0.$

Rappel :

On rappelle que toute suite réelle bornée admet une sous suite convergente.

Dans la suite de cette partie on désignera par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors elle est de Cauchy.

2) On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel u, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u.

c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) Conclure.

Partie II (Théorèmedupointfixe)

Soit I un intervalle infini fermé de $\mathbb{R}$, (ie $I=\mathbb{R}$ ou I est de l'un des types suivants : $(]-\infty,a],a\in\mathbb{R})$; $([a,b],a,b\in\mathbb{R},a<b)$; $([b,+\infty[,b\in\mathbb{R}))$

1) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle convergente vers un réel u, et que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes dans I, alors $u\in I$.

2) Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une application telle que $f(I)\subset I$ et $k\in]0,1[$ tels que :

$\forall x,y\in I\quad|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$

a) Montrer que f est continue sur I.

b) Soit $u_0\in I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

(i) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que $|u_n-u_{n-1}|\leq k^{n-1}|u_1-u_0|$.

(ii) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall p\in\mathbb{N}^*\quad|u_{n+p}-u_n|\leq\frac{k^n}{1-k}|u_1-u_0|$.

(iii) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un certain réel u.

(iv) Montrer que u est l'unique réel $v\in I$ tel que $f(v)=v$.

3) Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une application dérivable telle que $f(I)\subset I$, et $k\in]0,1[$ tel que :

$\forall x\in I\quad|f'(x)|\leq k$.

Montrer que toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I définie par :

$u_0\in I$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=f(u_n)$.

est convergente vers un réel $u\in I$, et que u est l'unique réel $v\in I$ tel que : $f(v)=v$.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$u_0\in\mathbb{R}\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n^2+1}-1\right)$.

Montrer, en utilisant ce qui précéde, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et trouver sa limite.

Partie III (Un exemple)

On définit deux suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$, par les conditions :

$$(C)\left\{\begin{array}{lcl} u_0 \in [-1,+\infty[\ \ (1) & ; & v_1 \in \mathbb{R}^* \ \ (2) \\ \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \ \ (3) & ; & \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}} \ \ (4) \end{array}\right.$$

1) Montrer que l'on définit effectivement deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$, $a \neq 1$, et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lambda_n = 2^{n-1}(a^{2^{-n}} - a^{-2^{-n}})$$

Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est du type $(v_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (C).

3) Étudier les variations de $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ et le signe de $f(x) - x$.

Faire une représentation graphique soignée dans un repére orthonormé.

4) En déduire que :

a) Les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ sont monotones convergentes vers 1.

b) Les suites $(v_n)_{n\geq 1}$ sont monotones et les termes de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ sont non nuls et de signe constant.

5) Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ si $u_0 = 1$.

6) Montrer l'inégalité $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{3}|u_n - 1|$ pour $n \geq 1$.

7) On suppose que $u_0 > 1$.

a) Montrer que $\forall t > 0 \quad \ln(1 + t) < t$.

b) Établir les inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$|\ln(|v_n|) - \ln(|v_{n+p}|)| \leq (u_{n+1} - 1) + (u_{n+2} - 1) + \ldots + (u_{n+p} - 1) \leq \frac{u_n - 1}{2}$.

c) En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

8) On suppose que $u_0 < 1$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

(On pourra établir $(\frac{1}{u_{n+1}} - 1) \leq \frac{1}{3}(\frac{1}{u_n} - 1)$ pour $n \geq 2$.)

Fin
à la prochaine