CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle 4 (08-09): *Structures algèbriques* *Suites numériques*

Lundi 2 Mars 2009

Durée : 2 heures

Blague du jour :
Lors d'une expérience, un ingénieur, un physicien et un mathématicien sont enfermés chacun dans une pièce, avec une boite d'épinard, mais sans ouvre-boîtes. Vingt-quatre heures plus tard, les portes de chacune des trois pièces s'ouvrent.
Dans la première pièce, l'ingénieur est en train de dormir avec à côté de lui la boite de conserve toute cabossée, mais ouverte et vide. On le réveille et on lui demande comment il a procédé. Il explique :
« Quand j'ai eu faim, j'ai pris la conserve et j'ai tapé sur son point de moindre résistance. »
Dans la deuxième pièce, le physicien est lui aussi repu d'épinards. Il explique :
« Quand j'ai eu faim, j'ai observé la boite, posé quelques équations et appliqué une forte pression sur les points idoines, et la boite s'est ouverte. »
Dans la troisième pièce, le mathématicien est assis par terre dans un coin, la boite d'épinard à ses pieds et il marmonne en transpirant à grosses gouttes :
« Supposons que la boîte est ouverte, supposons que la boîte est ouverte... »

Mathématicien du jour ***Viete***
François Viète (1540-1603) est un mathématicien français. Il est considéré comme un des principaux précurseurs de l'algèbre, car il est le premier à avoir représenté les paramètres d'une équation par des lettres. Il était aussi connu de son temps comme un conseiller privé royal fidèle et compétent. Il étai chargé exclusivement du déchiffrage des codes secrets ennemis, quelques semaines avant sa mort, le mémoire qu'il rédige sur des questions de cryptographie, rend d'un coup caduques toutes les méthodes de chiffrement de l'époque.
Il se lance dans des travaux d'astronomie et de trigonométrie et rédige un traité jamais publié. Il publie un ouvrage de trigonométrie, où il présente de nombreuses formules sur les sinus et les cosinus. Parmi ses belles formules, notons celle-ci qui donne une valeur approchée de $\pi \simeq 2 \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \dots$

PROBLÉME I.

1) **La loi + est définie sur $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la relation suivante $(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)$, qui est associative et commutative, d'élément neutre $(0,0)$, et enfin chaque couple (a,b) est inversible pour $+$, dont l'inverse est $(-a,-b)$.**

2) **Non, car ne contient pas l'élément neutre $(0,0)$.**

3) a) **D'après le paramétrage d'une hyperbole, on a $(x,y)\in\mathcal{H} \iff \exists u\in\mathbb{R}$ tel que $x=4\cosh u, y=2\sinh t \iff \exists t=\mathrm{e}^u\in\mathbb{R}^*$ tel que $x=2(t+\frac{1}{t}), y=t-\frac{1}{t}$.**

   b) **La question précédente assure la surjection de F.**
   Injection : Soit $t,t'\in\mathbb{R}^*$ tel que $F(t)=F(t')$, d'où le système $\left\{\begin{array}{lcll} 2(t+\frac{1}{t}) & = & 2(t'+\frac{1}{t'}) & (L_1)\\ t-\frac{1}{t} & = & t'-\frac{1}{t'} & (L_2)\end{array}\right.$.
   En faisant l'opération L_1+2L_2 on obtient $t=t'$.
   La réciproque : Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, cherchons $t\in\mathbb{R}^*$ tel que $F(t)=(x,y)$, c'est à dire $\left\{\begin{array}{lcll} 2(t+\frac{1}{t}) & = & x & (L_1)\\ t-\frac{1}{t} & = & y & (L_2)\end{array}\right.$. En faisant l'opération L_1+2L_2 on obtient $F^{-1}(x,y)=t=\dfrac{x+2y}{4}$.

4) a) **Il suffit de vérifier que $\dfrac{X^2}{16}-\dfrac{Y^2}{4}=1$, sachant que $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$ et $\dfrac{x'^2}{16}-\dfrac{y'^2}{4}=1$.**

   b)
$$\begin{aligned} F(t)*F(t') &= \left(2(t+\tfrac{1}{t}),t-\tfrac{1}{t}\right)*\left(2(t'+\tfrac{1}{t'}),t'-\tfrac{1}{t'}\right)\\ &= \left((t+\tfrac{1}{t})(t'+\tfrac{1}{t'})+(t-\tfrac{1}{t})(t'-\tfrac{1}{t'}),\tfrac{1}{2}.(t+\tfrac{1}{t})(t'-\tfrac{1}{t'})+\tfrac{1}{2}.(t-\tfrac{1}{t})(t'+\tfrac{1}{t'})\right)\\ &= \left(2(tt'+\tfrac{1}{tt'}),tt'-\tfrac{1}{tt'}\right)\\ &= F(tt')\end{aligned}$$

   c) **On remarque que F est un morphisme de lois de composition interne, on peut donc montrer que $(\mathcal{H},*)$ est un groupe abélien en utilisant le principe de transport de structure de celle de $(\mathbb{R}^*,\times)$.**
   Commutativité : Soit $(x,y),(x',y')\in\mathcal{H}$, posons $(x,y)=F(t)$ et $(x',y')=F(t')$, donc $(x,y)*(x',y')=F(t)*F(t')=F(tt')=F(t't)=(x',y')*(x,y)$.
   Associativité : pareille que la commutativité.
   Elément neutre : $e=F(1)=(4,0)$.
   Inversibilité : Soit $m=(x,y)\in\mathcal{H}$, posons $(x,y)=F(t)$ et $(x',y')=F\left(\frac{1}{t}\right)$, alors $(x,y)*(x',y')=F(t)*F\left(\frac{1}{t}\right)=F(1)=e$, donc (x',y') est l'inverse de (x,y).

   d) **D'après les question précédente, $F:(\mathbb{R}^*,\times)\longrightarrow(\mathcal{H},*)$ est un isomoprhisme.**

5) **Posons $(x,y)=F(t)$ où $t=F^{-1}(x,y)=\dfrac{x+2y}{4}$, donc $(x,y)^n=F(t)^n=F(t^n)=\left(2(t^n+\frac{1}{t^n}),t-\frac{1}{t^n}\right)$.**

6) a) **$f\circ f(m)=f(c*m^{-1})=c*\left(c*m^{-1}\right)^{-1}=c*m*c^{-1}=m$ car $*$ est commutative.**

   b) **f étant bijective d'après la question précèdente, une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit automotphisme de $\mathcal{H}$, est qu'elle soit morphisme, c'est à dire $f(m*n)=f(m)*f(n)$, donc $c*(m*n)^{-1}=c*m^{-1}*c*n^{-1}$ or $(m*n)^{-1}=m^{-1}*n^{-1}$ et $*$ commutative, donc $c*c=c$, d'où $c=e$.**

PROBLÉME II.

Partie I (déjà traité en cours.)

Partie II

1) **La raison principale est qu'au passage à la limite les inégalités larges restent larges. (détaillez quand même la rédaction).**

2) a) **Évident, puisque** $x \longrightarrow a \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| \longrightarrow 0$, **donc** $\lim\limits_{a} f(x) = f(a)$.

   b) i. **Question à faire par récurrence sur** $n \in \mathbb{N}^*$, **le résultat est évidement vrai pour** $n = 1$, **supposons qu'il est pour** n, **donc :**
   $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq k|u_n - u_{n-1}| \leq k^n|u_1 - u_0|$.

   ii. **Á l'aide de l'inégalité triangulaire, on a :**
$$\begin{aligned} |u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} |u_\alpha - u_{\alpha-1}| \leq & \quad |u_1 - u_0| \sum_{\alpha=n+1}^{n+p} k^{\alpha-1} \\ = & \quad |u_1 - u_0| k^n \frac{1 - k^{n+p+1}}{1 - k} \\ \leq & \quad |u_1 - u_0| \frac{k^n}{1 - k} \end{aligned}$$

   iii. **Ainsi** $\sup\limits_{p \in \mathbb{N}} |u_{n+p} - u_n| \leq |u_1 - u_0| \dfrac{k^n}{1 - k} \longrightarrow 0$, **quand** $n \longrightarrow +\infty$, **donc la suite est de Cauchy et par la suite elle converge, d'après la partie I.**

   iv. **Comme** f **est continue et** $v = \lim\limits_{+\infty} u_n$, **alors au passage à la limite dans la relation** $u_{n+1} = f(u_n)$, **on obtient** $v = f(v)$.
   Unicité : Supposons qu'il existe un autre réel u **tel que** $f(u) = u$, **alors** $|v - u| = |f(v) - f(u)| \leq k|v - u| < |v - u|$ **car** $0 < k < 1$, **ce qui est absurde si** $v \neq u$.

3) **D'après le TAF (théorème des accroissements finis), on a** $\forall x, y \in I,\ \exists c \in I$ **tel que** $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$, **d'où** $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||(x - y)| \leq k|x - y|$ **et on est ramené aux hypothèse de la question précèdente.**

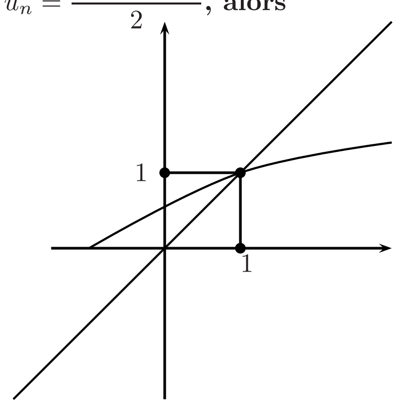
4) **Prenons** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{2}$ **et** $I = [0, 1]$, **on a** $u_0 \in I$ **et** $f(I) \subset I$ **avec** $f'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}}$ **et** $f'(x) = \dfrac{1}{2(x^2 + 1)}$, **donc** $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k = f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 1$, **d'après la question précédente** u_n **converge vers** v **tel que** $f(v) = v$ **dont l'unique solution est** $v = 0$.

Partie III

1) **Car** $v_n > 0,\ \forall n \geq 2$, **à montrer par récurrence.**

2) **Posons** $\alpha = 2^{-n-1}$, **pour que** λ_n **verifie (C) il faut que :**
$u_{n+1} = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^{2\alpha} - a^{-2\alpha}}{a^\alpha - a^{-\alpha}}\right) = \dfrac{a^\alpha + a^{-\alpha}}{2}$. **Posons donc** $u_n = \dfrac{a^{2\alpha} + a^{-2\alpha}}{2}$, **alors**
$\sqrt{\dfrac{u_n + 1}{2}} = \sqrt{\dfrac{a^{2\alpha} + a^{-2\alpha} + 4}{4}} = \dfrac{a^\alpha + a^{-\alpha}}{2} = u_{n+1}$.
Conclusion : (λ_n) **vérifie (C) en posant** $u_n = \dfrac{a^{2\alpha} + a^{-2\alpha}}{2}$ **où** $\alpha = 2^{-n-1}$.

3) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2(1 + x)}} \geq 0$, **donc** f **est croissante.**
Pour $x \leq 0$ **on a** $x \leq f(x)$.
Pour $x \geq 0$, **on a** $f(x) \leq x \Longleftrightarrow x + 1 \leq 2x^2 \Longleftrightarrow 2x^2 - x - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1$.



4) a) (u_n) **est une suite récurrente définie par la relation** $u_{n+1} = f(u_n)$ **où** f **est croissante donc est monotone, sa monotonie dépond des deux premiers termes** u_0 **et** u_1, **on distingue alors deux cas :**

– $u_0 \leq 1$, **donc** $u_1 = f(u_0) \geq u_0$, **donc** (u_n) **est croissante, et on montre par récurrence qu'elle est majorée par 1, donc converge vers l'unique point fixe de** f **qui est 1.**
– $u_0 \geq 1$, **donc** $u_1 = f(u_0) \leq u_0$, **donc** (u_n) **est décroissante, et on montre par récurrence qu'elle est minorée par 1, donc converge vers l'unique point fixe de** f **qui est 1.**

b) Dans la question précedente on a montré qu'il n'y a que deux cas :
– $0 \leq u_n \leq 1$, **dans ce cas** $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$ **donc** v_n **croissante de signe constant.**
– $1 \leq u_n$, **dans ce cas** $0 \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ **donc** v_n **décroissante de signe constant.**

5) Si $u_0 = 1$, **alors la suite** u_n **est constante,** $u_n = 1,\ \forall n$, **donc** $v_n = 1$, **donc converge.**

6) On a déjà vu que $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2(1+x)}}$ **donc** $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2,82...} \leq \dfrac{1}{3}$, **donc** $|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - f(1)| = |f'(c)||u_n - 1| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - 1|$.

7) a) Simple étude sur $]0, +\infty[$ **de fonction** $t \mapsto \ln(1+t) - t$, **on en déduit en particulier que** $\ln t \leq t - 1,\ \forall t \geq 1$.

b)
$$\begin{aligned} |\ln(|v_n|) - \ln(|v_{n+p}|)| &= \left|\ln\left|\frac{v_n}{v_{n+p}}\right|\right| = \left|\ln\prod_{k=n}^{n+p-1}\left|\frac{v_k}{v_{k+1}}\right|\right| = \left|\sum_{k=n}^{n+p-1}\ln\left|\frac{v_k}{v_{k+1}}\right|\right| \\ &= \left|\sum_{k=n}^{n+p-1}\ln|u_{k+1}|\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1}(u_{k+1} - 1) \text{ car } u_k \geq 1 \end{aligned}$$

a partir de la question 6, on montrer par récurrence que $|u_{n+k} - 1| \leq \dfrac{1}{3^k}|u_n - 1|$, **donc**
$\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(u_{n+k} - 1) \leq (u_n - 1)\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{3^k} = (u_n - 1) \times \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{u_n - 1}{2} \times (1 - \frac{1}{3^n}) \leq \frac{u_n - 1}{2}$.

c) De la question précédente, on déduit que $\displaystyle\sup_{p\in\mathbb{N}}|\ln(|v_n|) - \ln(|v_{n+p}|)| \leq \frac{u_n - 1}{2} \longrightarrow 0$ **quand** $n \longrightarrow +\infty$, **donc** $(\ln(|v_n|))$ **est de Cauchy, et par suite elle converge, donc** $(|v_n|)$ **converge aussi, or** v_n **garde un signe constant donc elle converge.**

8) Si $u_0 < 1$, **alors la suite** (u_n) **est croissante vers 1, en particulier** $u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ **et donc** $1 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3}(1 - u_n)$, **d'où** $u_{n+1}\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1\right) \leq \dfrac{u_n}{3}\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$, **d'où** $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 \leq \dfrac{u_n}{3u_{n+1}}\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right) \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$

Fin
à la prochaine