CPGE My Youssef, Rabat

Prépas G.S High Tech, Rabat

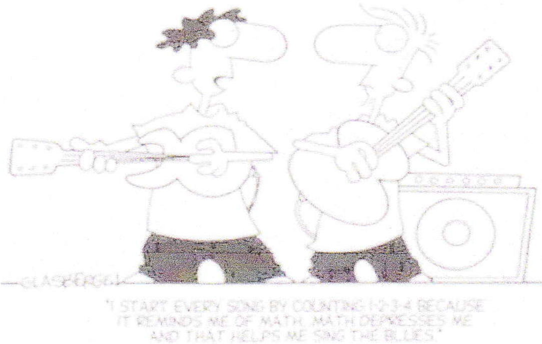
بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤمِنُون
صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

DL 11 (08-09): *Suites numériques*

1er février 2009

Blague du jour :

Je suis nul en calcul (n'oubliez jamais de vérifier la somme de vos notes dans chaque DS), pour trois raisons :
1- ça ne m'intéresse pas,
2- je compte faux.



Personnalité du jour — *Omar Al-Khayyam*

Ghiyath ed-din Abdoul Fath Omar Ibn Ibrahim al-Khayyam Nishabouri, plus connu sous le nom d'Omar Al-Khayyam (1048-1131, fils d'un fabricant de tentes) est un philosophe, poête, mathématicien et astronome perse (Iran).
Il démontre que les équations cubiques peuvent avoir plus d'une racine. C'est le premier mathématicien qui ait traité systématiquement des équations cubiques, en employant d'ailleurs des tracés de coniques pour déterminer le nombre des racines réelles et les évaluer approximativement.
Il construit des tables astronomiques. il réforme le calendrier persan en introduisant la notion d'année bissextile et mesure la longueur de l'année comme étant de 365,24219858156 jours. L'année perse (djélaléenne) est plus exacte que l'année grégorienne créée, cinq siècles plus tard, qui fait actuellement 365,242190 jours.

PROBLÉME. **DL PCSI, France, 2002-2003**

▶ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n} - x^n - x - 3$.

Q1 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_1(x) = 0$.

Q2 Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles -1 est solution de l'équation $f_n(x) = 0$?

Q3 ⋆⋆ Montrez que, dans l'intervalle $[0, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution, qui sera désormais notée x_n.

Q4 Pour $n \geqslant 2$, prouvez l'encadrement $1 < x_n < 2$.

Q5 Quel est le sens de variation de la suite de terme général x_n ?

Q6 Montrez que cette suite converge. Pour l'instant, que pouvez-vous dire de sa limite ℓ ?

Q7 Soit $\alpha > 1$. Quelle est la limite de la suite de terme général $f_n(\alpha)$?

Q8 En déduire la valeur de ℓ.

mamouni.myismail@gmail.com
www.chez.com/myismail

▶ Nous nous proposons de montrer que $1 + \frac{1}{2n} < x_n < 1 + \frac{1}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q9}}$ Le nombre e est la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k!}$. Utilisez cette définition pour établir l'encadrement $\frac{8}{3} < e < 3$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Utilisez cet encadrement pour déterminer le signe de $e^2 - e - 4$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Quelle est la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

$\boxed{\text{Q12}}$ En déduire que la suite de terme général $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge vers $e^2 - e - 4$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez alors que $f_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est strictement positif APCR.

$\boxed{\text{Q14}}$ En déduire la majoration $x_n < 1 + \frac{1}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q15}}$ En suivant la même démarche, montrez que l'on a $1 + \frac{1}{2n} < x_n$ APCR.

▶ Soit $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2t} - e^t - 4$. Nous allons établir $x_n - 1 \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$, où λ est la solution de l'équation $\varphi(t) = 0$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Déterminez λ.

$\boxed{\text{Q17}}$ Soit $k > 0$. Quelle est la limite de la suite de terme général $\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$?

$\boxed{\text{Q18}}$ En déduire la limite de la suite de terme général $f_n\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Supposons $k > \lambda$. Montrez que $f_n\left(1 + \frac{k}{n}\right) > 0$ APCR ; en déduire $x_n < 1 + \frac{k}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q20}}$ Supposons maintenant $k < \lambda$. Montrez de la même façon que $x_n > 1 + \frac{k}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q21}}$ Concluez !

Fin
à la prochaine