Corrigé DL 15 (Series)

1) Rappel si f décroissante alors $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \forall x \in [k, k+1]$

donc $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(x)$ d'où $\boxed{\sum_{k=n+1}^{m+1} f(k) \leq \int_n^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{m} f(k)}$

et que : $\boxed{\int_n^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{m} f(k) \leq \int_{n-1}^{m} f(x)dx}$

$R_n = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3}$ et $\int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{x^3}dx \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} \leq \int_n^m \frac{1}{x^3}dx$

qd $m \to +\infty$ on obtient $\boxed{\frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}}$

pour avoir le nb de termes demandé il suffit que

$\frac{1}{2n^2} \leq 10^{-8}$ càd $n^2 \geq \frac{10^8}{2}$ donc $\boxed{n \geq \frac{10^4}{\sqrt{2}} =}$

2) on a

$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq S - \bar{S}_n = R_n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2(n+1)^2}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

donc $|R_n| \leq \frac{1}{4} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

il suffit donc de mq $\frac{2n+1}{2(n+1)^2} \leq \frac{1}{n}$

càd $n(2n+1) = 2n^2 + n \leq 2(n+1)^2 = 2n^2 + 4n + 2$ (vrai)

pour avoir une valeur approchée à 10^{-8} il suffit que

$\frac{1}{2n^3} \leq 10^{-8}$ càd $n^3 \geq \frac{10^8}{2}$ càd $\boxed{n \geq 100\sqrt[3]{50}}$

3) a) on décompose la fraction $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)$

d'où $S = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

le nombre de terme obtenu est n tq

b) On a $\frac{1}{k^3} - \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{3k+2}{k^3(k+1)(k+2)} \geq \frac{3}{(k+2)^4}$

car $3k+2 \geq k$ et $k^2(k+1)(k+2) \leq (k+2)^4$

donc $R'_n \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{3}{(k+2)^4} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{3}{(k+2)^4}$

$\geq \lim_{m\to+\infty} \int_{n+1}^{m+1} \frac{3}{(x+2)^4}\,dx = \frac{1}{(n+3)^4}$

et $\cancel{\frac{3k+2}{k^3(k+1)(k+2)} \leq \frac{3}{(k+1)^4}}$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)^3}\right)}_{\leq 0} \leq \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

car $k(k+2) \leq (k+1)^2$

c) $-A \leq S' - S''_n = R'_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+3)^3}\right) = A$

donc
$$|S' - S''_n| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+3)^3}\right) = \frac{9n^2+27n+27}{2n^3(n+3)^3} \leq \frac{9}{2n^4}$$

car $n(n^2+3n+3) \leq (n+3)^3$

le n cherché vérifie $\frac{9}{2n^4} \geq 10^{-8}$ càd $n^4 \geq \frac{9}{2}10^8$

donc $\boxed{n \geq 100\sqrt[4]{\frac{9}{2}}}$

4) a) $u_n = \frac{a}{n^2} + \frac{b}{n^3} + \frac{c}{n^4} + \frac{1}{n^3} - \frac{a}{(n-1)^2} - \frac{b}{(n-1)^3} - \frac{c}{(n-1)^4}$

$\cancel{= \frac{a-1}{n^2} + \frac{b}{n^3}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-2}\right) + \frac{c}{n^4}\left(1 - \right.}$

$= \frac{a}{n^2}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-2}\right) + \frac{b}{n^3}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-3}\right) + \frac{c}{n^4}\left(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-4}\right) + \frac{1}{n^3}$

effectuer un DAS à l'ordre 5 (on doit trouver 3 eq pour déterminer a, b et c)

Rappel $(1+x)^{-\alpha} = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}x^2 - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)x^3 + \dots$

$$u_n = \frac{a}{n^2}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3}\right) + \frac{b}{n^3}\left(-\frac{3}{n} - \frac{6}{n^2}\right) + \frac{c}{n^4}\left(\frac{4}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^5}\right) + \frac{1}{n^3}$$

$$u_n = \frac{1-2a}{n^3} - \frac{3a+3b}{n^4} - \frac{4a+6b-4c}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

il faut que $1-2a = 3a+3b = 4a+6b-4c = 0$

donc $\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2} \text{ et } c=\frac{1}{4}}$

b) Après de longues simplification tenant compte des valeurs de a, b et c on trouve que

$u_n = \frac{1-2n}{4n^4(n-1)^4} \leq 0$ donc U_n est decroissante

or $\lim_{+\infty} U_n = S$ donc $S \leq U_n$

d'autre part $-u_k \leq \frac{3}{4(k-1)^7}$

car $\frac{2k}{4k^4(k-1)^4} \leq \frac{1}{2(k-1)^7}$ et $-\frac{1}{k^4(k-1)^4} \leq \frac{1}{4(k-1)^7}$

donc $-\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \frac{3}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)^7} \leq \frac{3}{4}\int_n^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^7}dx$ ← $\lim_{m\to+\infty}$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{(x-1)^6}$

on a $|U_n - S| \leq \frac{1}{8(n-1)^6}$

le nbr n est obtenu tq $\frac{1}{8(n-1)^6} \leq 10^{-8}$

càd $(n-1)^6 \geq \frac{10^8}{8}$

donc $\boxed{n-1 \geq 10 \times \sqrt[6]{\frac{100}{8}}}$

puis calculer S_n

Fin