بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

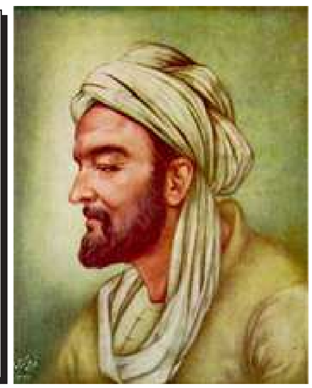
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

CPGE My Youssef, Rabat

DL 15 Bis (08-09): *Séries numériques* *Séries entières*

26 mars 2009

Blague du jour :
Vous êtes un accro d'Internet ? la réponse serait oui, si :
- Vous refusez de partir en vacances à un endroit sans électricité ni ligne de téléphone.
- Vous rêvez en HTML.
- Vous écrivez automatiquement com après chaque point.
- Vous sortez de votre chambre et découvrez que votre famille a déménagé.
- Vous allumez l'interphone en quittant la pièce de l'ordinateur pour savoir si des mails sont arrivés.
- Tous vos amis ont un @ dans leur nom.



Mathématicien du jour ***Ibn Sina-Avicenne***
Abu Ali al-Husayn ibn Abd Allah ibn Sina (980-1037), dit Avicenne était un philosophe, un écrivain, un médecin et un scientifique musulman d'origine Boukhara en ouzbakistan. Il s' intéressa à de nombreuses sciences, notamment l'astronomie.
Ses disciples l'appelaient Cheikh el-Rais, prince des savants, le plus grand des médecins, le Maître par excellence, le troisième Maître (après Aristote et Al-Farabi).
Il semble qu'il fut précoce dans son intérêt pour les sciences naturelles et la médecine, qu'à 14 ans, il étudie seul. Il apprit l'intéralité du Coran à cet âge et à 16 ans il dirigeait des médecins célèbres.
Son oeuvre majeure est sans doute Le *Kitab Al Qanun fi Al-Tibb*. Il servira de livre de base de l'enseignement de la médecine en Europe jusqu'au XVIIe siècle. Les enseignements contenus dans le Qanun ne seront remis en cause que tardivement, par Léonard de Vinci d'abord, qui rejette l'anatomie d'Avicenne à la suite des ses propres observations. La découverte de la circulation générale par William Harvey en 1628 termine de mettre définitivement le Qanun au rang de la science ancienne.

Problème : **Source : INT Management 2007**

On admettra la propriété suivante : Si deux suites réelles (t_n) et (s_n) à termes positifs sont équivalentes et si les séries $\sum t_n$ et $\sum s_n$ sont divergentes, alors les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} t_k$ et $\sum_{k=1}^{n} s_k$ sont équivalentes quand n tend vers l'infini.
On définit la suite réelle (u_n) par u_0 strictement positif et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}.$$

.

Première partie.

1) Montrer que la suite (u_n) est convergente .

2) Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)$ est convergente, en déduire que u_n équivaut à $\dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers plus l'infini.

3) Déterminer un équivalent de la suite $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} - 1\right)$, en déduire qu' il existe un réel b que l'on déterminera vérifiant :

$$\frac{1}{u_{n+1}} = n + b\ln n + o(\ln n)$$

quand n tend vers l'infini.

4) En déduire d'abord que l' on a :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{b\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

quand n tend vers l'infini, puis :

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{b\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

quand n tend vers l'infini.

Deuxième partie.

On considère la série entière réelle $\sum u_n x^n$, on notera $f(x)$ la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ de cette série entière quand elle converge.

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$.

2) Montrer que f est définie en -1.

3) Étudier la convergence absolue de la série de terme général $u_n - \dfrac{1}{n}$. En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ quand x tend vers 1, puis en déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Fin
à la prochaine