Corrigé DL 15 Bis

1) $u_n > 0$ par récurrence, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ donc (u_n) strict $\searrow$
minoré par 0 donc converge vers l tq
$l = l e^{-l}$ donc $l = 0$

2) $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} \longrightarrow 1$ car $u_n \longrightarrow 0$

$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim 1$ et $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ diverge

donc $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1$ càd $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \sim n$

donc $\frac{1}{n u_n} - \frac{1}{n u_0} \longrightarrow 1$ donc $\frac{1}{n u_n} \longrightarrow 1$ donc $u_n \sim \frac{1}{n}$

3) $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} - 1 = \frac{e^{u_n} - 1}{u_n} - 1 = \frac{u_n}{2} + o(u_n)$ après un DL de e^{u_n} puisque $u_n \longrightarrow 0$

donc $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} - 1 \sim \frac{u_n}{2} \sim \frac{1}{2n}$

or $\sum \frac{1}{2k}$ diverge donc $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} - 1 \right) \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

donc $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1} - n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \frac{1}{2} \int_1^n f(t)\,dt = \int_1^n \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2} \ln n$

comparaison d'une somme avec une intégrale

$\frac{1}{u_{n+1}} \rightarrow 0$ et $n \rightarrow +\infty$

donc $\frac{1}{u_{n+1}} - n \sim \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1} - n \sim \frac{1}{2} \ln n$

donc $\frac{1}{u_{n+1}} - n = \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$

$\frac{1}{u_{n+1}} = n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$

4) $u_{n+1} = \dfrac{1}{n + b\ln n + o(\ln n)} = \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{1 + b\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}$

$= \frac{1}{n}\left(1 - b\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - b\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

$u_n = e^{u_n} u_{n+1} \sim u_{n+1}$

donc $u_n = \frac{1}{n} - b\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

2^e partie

1) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} \longrightarrow 1$ donc $R = 1$

2) $\sum u_n (-1)^n$ serie alternée qui verifie le critère special de Leibniz donc converge

3) $\left|u_n - \frac{1}{n}\right| \sim b\dfrac{\ln n}{n^2}$ (serie de Bertrand qui cvge)

car $\dfrac{\ln n}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ cvge

la serie entiere de terme g^{al} $\sum \left(u_n - \frac{1}{n}\right)x^n$ cvge qd $|x| = 1$

donc a pour rayon de cvgce $R \geq 1$ avec cvge sur le cercle de rayon 1 donc bornée sur $|x| \leq 1$

pour $x < 1$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(u_n - \frac{1}{n}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + O(1)$

$\displaystyle\lim_{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = +\infty$ car $\sum \frac{1}{n}$ div

donc $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}} \longrightarrow 1$ qd $x \to 1$

$\underset{=}{x<1}$ $\displaystyle f(x) \underset{1}{\sim} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$
$= -\ln(1-x)$

on permute $\int$ et $\sum$ à l'interieur du disque de cvgce