# DL 2 Bis : *Suites réelles*

*A rendre Lundi 08 Novembre 2004*

## Problème 1:

**Un développement asymptotique de** $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. **Un équivalent de** $H_n$ : Soit $n$ un entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Si $k$ est un entier non nul, montrer que :
   $$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$
   (b) En déduire l'encadrement suivant :
   $$\ln n + \frac{1}{n} \leq H_n \leq \ln n + 1.$$
   (c) Donner un équivalent de $H_n$ en $+\infty$.
2. **Suites adjacentes :** Soit deux suites de réels $(v_n)$ et $(w_n)$ adjacentes avec $(v_n)$ croissante.
   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que, pour tout entier $n \geq n_0, v_n \leq w_n + 1$. En déduire que la suite $(v_n)$ est majorée.
   (b) Montrer de même que la suite $(w_n)$ est minorée.
   (c) En déduire que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes et convergent vers une même limite réelle.
3. **Constante d'Euler** : On pose, pour $n \geq 1$ : $c_n = H_n - \ln n, d_n = c_n - \frac{1}{n}$.
   (a) Montrer que, pour
   $$n \geq 1, \frac{1}{n+1} \leq \ln n + 1 - \ln n \leq \frac{1}{n}.$$
   (b) Montrer que les suites $(c_n)$ et $(d_n)$ convergent vers une même limite. On note alors $\gamma$ cette limite ($\gamma$ est appelée constante d'Euler).
   (c) Montrer que :
   $$H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

*Source : CONCOURS NATIONAL FRANCAIS DEUG, SESSION 2003.*

---

**Problème 2:**

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + u_n^2 ; u_0 = a > 0.$

**Partie 1 :** *Convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que cette suite est strictement positive et monotone.
2. Montrer que cette suite diverge vers l'infini.

**Partie 2 :** *Comportement asymptotique de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n$.

1. Prouver que pour tout entier $n$ de $N$ : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$.
   En déduire que quels que soient les entiers naturels $p$ et $n$ :
   $$0 < v_{n+p+1} - v_{n+p} \leq \frac{1}{2^{n+p+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$
2. En déduire que quels que soient les entiers naturels $k$ et $n$ :
   $$0 < v_{n+k+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right).$$
3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge vers une limite notée $\alpha$ .
4. Montrer que : $\forall n\in\ N, u_n \leq \exp(\alpha 2^n)$.
   En passant à la limite pour n fixé dans l'encadrement de la question 2 Partie 2, montrer que : $\forall n \in\ N, \exp(\alpha 2^n) \leq u_n + 1$.
   En déduire, lorsque $n$ tend vers l'infini, l'équivalent suivant :
   $$u_n \sim \exp(\alpha 2^n).$$
5. On pose : $\beta_n = \exp(\alpha 2^n) - u_n$. Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et qu'elle vérifie la relation suivante :
   $$2\beta_n - 1 = (\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n)\exp(-\alpha 2^n).$$
6. Prouver enfin que lorsque n tend vers l'infini :
   $$u_n = -\frac{1}{2} + \exp(\alpha 2^n) + o(1).$$

*<u>Source</u> : Concours Ecricome 2003 (Ecoles de commerce), option S.*

---

*FIN*



*Mamouni My Ismail*
*CPGE Med V-Casablanca*