High Tech Prépas, Rabat

Devoir Libre: *Suites numériques*

7 février 2010

Blague du jour :
C'est deux chiens qui discutent. Il Y en a un qui demande à l'autre :
- C'est quoi ton nom ? C'est ché.
- Ché ? C'est plutôt bizarre ?... Ben oui, mon maître me dit tout le temps "Va, cher Ché !".

Mathématicien du jour **Wallis**
John Wallis (1616-1703), est un mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Étudiant d'abord la théologie, il se réoriente ensuite vers les mathématiques et montre un grand talent pour la cryptographie durant la guerre civile, en décryptant les messages des ennemis. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society. On lui doit également le symbole de l'infini ∞.

Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt \text{ \textit{Intgrales de Wallis}}$$

et on se propose démontrer la formule suivante dite de *Stirling* :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

1) Montrer que $I_n = J_n$.

2) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

3) Montrer que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en déduire que : $I_n \sim In + 1$.

4) Montrer que le produit le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constant, en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

5) Exprimer I_{2n} et I_{2n+1} l'aide des factorielles.

6) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \alpha_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

Montrer que : $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \sim \dfrac{1}{12n^2}$.

On pourra l'utiliser sans le démontrer le résultat suivant :

$\ln(1+\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

7) En déduire que $\dfrac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \leq \dfrac{2}{n^2}$ partir d'un certain rang.

8) Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est croissante majore, puis converge.

Indication : On pourra utiliser la relation $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

9) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}\right)$ est croissante majore, puis convergente.

Conclure que α_n converge vers une limite strictement positive, on notera α sa limite sans chercher la calculer.

10) Exprimer $\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ en fonction de n et I_{2n}.

11) En déduire la valeur de α puis que :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad \textit{(formule de Stirling)}$$

12) En déduire $\lim \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$.

Fin
à la prochaine