INT Management 2003

L'énoncé comporte deux problèmes indépendants. Ils doivent être rédigés sur des copies séparées

PROBLÈME I

La partie I et les questions 1 et 2 de la partie II sont indépendantes.

PARTIE I

Pour tout couple (a, b) de réels strictement positifs, on définit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b \text{ puis } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \text{ et } b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

Question 1

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq b_n$.

b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont monotones.

c) Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

Question 2

On note L l'application qui à tout couple (a, b) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ associe la limite commune des deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $L(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

a) Déterminer $L(a, a)$ pour tout $a > 0$.
Pour tout $a > 0$, tout $b > 0$ et tout $\lambda > 0$, exprimer $L(b, a)$ et $L(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $L(a, b)$.

b) On suppose $a < b$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $c_{n-1} \in]a_{n-1}, b_{n-1}[$ tel que $b_n - a_n = \dfrac{1}{8c_{n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right)^2$.
En déduire que $\dfrac{1}{8b}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right)^2 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{1}{8a}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right)^2$.

c) Expliciter finalement une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que

$$\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\left(8\max(a, b)\right)^{\varepsilon_n - 1}}|b - a|^{\varepsilon_n} \leq |b_n - a_n| \leq \frac{1}{\left(8\min(a, b)\right)^{\varepsilon_n - 1}}|b - a|^{\varepsilon_n}.$$

d) On suppose $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 1$.
Quelle majoration simple obtient-on pour $b_3 - a_3$, $b_4 - a_4$?
(on rappelle que $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$.)
Que pensez-vous de la vitesse de convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

PARTIE II

Pour tout couple (a, b) de réels strictement positifs, on pose :

$$F(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}}$$

Question 1

a) Comparer $F(a, b)$ et $F(b, a)$ et pour tout $\lambda > 0$ exprimer $F(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $F(a, b)$.

b) Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = F(1, x)$. Montrer que f est continue et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$

c) Exprimer $F(a, b)$ en fonction de $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Question 2

On suppose $a < b$.

a) A l'aide du changement de variable défini par $u = \varphi(t) = \sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}$ montrer que :

$$F(a, b) = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)}}$$

b) Pour tout $u \in [a, b]$ on pose $h(u) = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{ab}{u}\right)$.

Étudier les variations de h sur $[a, b]$ et tracer sa représentation graphique.

c) Déterminer l'unique réel c appartenant à $[a, b]$ tel que les restrictions h_1 et h_2 de h à $[a, c]$ et à $[c, b]$ admettent chacune une fonction réciproque.
Expliciter h_1^{-1} et h_2^{-1} et donner leurs tableaux de variations.

d) On pose $v = h(u)$. Montrer que $\sqrt{(b^2 - u^2)(u^2 - a^2)} = 2u\sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - v^2}$.

Montrer que $F(a, b) = F\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$. (On pensera à écrire $]a, b[=]a, c] \cup [c, b[$)

Question 3

a) Montrer que pour tout (a, b) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $F(a, b) = F(a_n, b_n)$.

b) Montrer finalement que $F(a, b) = \dfrac{\pi}{2L(a, b)}$.

c) On suppose de nouveau $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 1$. Montrer que $\dfrac{\pi}{2b_4}$ et $\dfrac{\pi}{2a_4}$ sont des valeurs approchées par défaut et par excès de $F(a, b)$ à moins de 10^{-13} près.