MPSI-High Tech Prépas

Contrôle

Nombre réels et suites numériques

Rabat le 23 février 2010

Blague du jour :

Une maman à sa jeune fille :
- Je te conseille d'épouser un archéologue.
- Ah bon ? Et pourquoi ?
- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.

Mathématicien du jour **Fibonacci**

Leonardo Fibonacci (1175- 1250) est un mathématicien italien, connu en français sous l'équivalent « Léonard de Pise ». Son éducation mathématique s'est faite en grande partie en Afrique du Nord, pour des raisons commerciales. Ayant aussi voyagé en Egypte, en Syrie, il en rapporta les chiffres arabes et la notation algébrique

Jeudi 25 Février 2010

Durée : 1 heure

Exo 1

La suite (u_n) de *Fibonacci* est définie par : $u_0 = 1; u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1) *(1.5 pt)* Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) *(1 pt)* Déduire pour $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

3) *(1 pt)* Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, puis $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$.

a) *(1.5 pt)* Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n.

b) *(1 pt)* Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) *(2 pts)* En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

d) *(2 pts)* En déduire que la suite (v_n) converge. Quelle est sa limite ?

5) *(2 pts)* Montrer que u_n s'écrit sous la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ o r_1, r_2 les solutions de l'équation $r^2 = r + 1$ et λ, μ deux constantes à trouver.

6) *(1 pt)* Retrouver le résultat de *4.d* .

Exo 2

(6 pts) Déterminer, quand elles existent, les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble :

$$F = \left\{ 1 - \frac{1}{n-m} \text{ tel que } (n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } n \neq m \right\}$$

Fin

À la prochaine