MPSI-High Tech Prépas

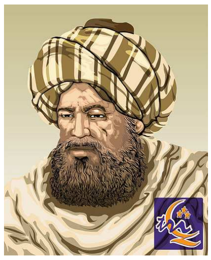
Corrigé Contrôle

Nombre réels et suites numériques

Rabat le 24 février 2010

Blague du jour :

C'est un type qui se promène dans la rue, et accroché sur la porte d'une entrée d'un jardin, il voit : ATTENTION PERROQUET MÉCHANT ! Et un peux plus loin dans le jardin, il aperçoit notre bête, attachée sur un perchoir. Notre, un hardi gaillard se marre en voyant la bestiole attachée sur son perchoir. Décidant de tenter le diable, il passe la barrière et pénètre dans le jardin. Soudain, le perroquet : "REX, ATTAQUE ! ! ! !"



Mathématicien du jour **Al-Battani**

Al-Battani (env. 855-923) était un astronome et mathématicien musulman, d'origine turque. On le désigne parfois comme le « Ptolémée des Arabes ». Il a découvert le mouvement de l'apogée du Soleil, calculé l'inclinaison de l'axe terrestre (23° 35'). Il a introduit l'usage du sinus dans les calculs, et en partie celui de la tangente, formant ainsi les bases de la trigonométrie moderne.

Jeudi 25 Février 2010

Durée : 1 heure

Exo 1

1) Montrer que $u_n \geq 0$ par récurrence forte .
2) Montrer que $u_n \geq n$ par récurrence forte .
3) Poser $a_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ et prouver la relation $a_n = -a_{n-1}$.
4) .
   a) Facile .
   b) $v_{n+2} - v_n = \dfrac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n u_{n+2}} = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$.
   c) $x_{n+1} - x_n = v_{2n+2} - v_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{u_{2n} u_{2n+2}} = \dfrac{1}{u_{2n} u_{2n+2}} > 0$.
   $$y_{n+1} - y_n = v_{2n+3} - v_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{u_{2n+1} u_{2n+3}} = -\frac{1}{u_{2n+1} u_{2n+3}} < 0$$
   . Enfin, $y_n - x_n = v_{2n+1} - v_{2n} = \dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} - \dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \dfrac{u_{2n+2} u_{2n} - u_{2n+1}^2}{u_{2n} u_{2n+1}} = \dfrac{1}{u_{2n} u_{2n+1}} \longrightarrow 0$
   d) Notons $l = \lim(v_n)$ $\quad v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ donc $l > 0, l = 1 + \dfrac{1}{l}$ c-a-d $l^2 = l + 1$ d'où $l = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
5) Par récurrence forte. À l'aide des conditions initiales $u_0 = \lambda + \mu = 0 \quad , u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 = 1$ on trouve les constantes .
6) On note $r_1 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, r_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ donc $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}}{\lambda r_1^n + \mu r_2^n}$ on factorise par r_1^{n+1} en haut et par r_1^n en bas et tend *n* vers $+\infty$

Fin

À la prochaine