# DS 3 : *Suites numériques Structures*

**Maths-PCSI**
**Mr Mamouni** : *myismail@altern.org*



*Samedi 10 Décembre 2005.*
*Durée: 3heures 30mn.*

# ÉNONCÉ

**Exercice 1.**

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrés muni de la somme et de la multiplication et on pose aussi : $\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

On peut utiliser le fait que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.

**1)** Est-il intégre ?

**2)** Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\det(A) = ad - bc$, appelé déterminant de $A$, montrer que :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \forall (A,B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

**3)** A quelles condition la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, et donner son inverse. Justifier votre réponse.

**4)** On pose $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det A \neq 0\}$, montrer que $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

**5)** On pose $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det A = 1\}$, montrer que $(\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

**6)** Dans toute la suite on pose $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que $J^2 = aJ + bI_2$

b) En deduire que $\mathcal{J} = \{\alpha J + \beta I_2 \text{ tel que } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

c) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'existence de $a_n, b_n$ tel que $J^n = a_n J + b_n I_2$, exprimer $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ et $a_n$ et $b_n$.

d) En déduire une relation entre $a_{n+2}, a_{n+1}$ et $a_n$, puis exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.

e) En déduire l'expression de $J^n$.

f) On pose $A = J - I_2$ et $B = J - 3I_2$

i. Calculer $A^2, B^2$, en déduire $A^n$ et $B^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii. Calculer $AB$.

iii. En déduire l'expression de $J^n$ en fonction de $J$ et $I_2$, puis comparer la avec celle trouvée dans la question 6.e)

**Fin et bonne chance.**