DS 3 : *Suites numériques* *Structures*

Maths-PCSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Samedi 10 Décembre 2005.
Durée: 3heures 30mn.

ÉNONCÉ

Exercice 1.

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrés muni de la somme et de la multiplication et on pose aussi : $\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

On peut utiliser le fait que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.

1) Est-il intégre ?

2) Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $\det(A) = ad - bc$, appelé déterminant de A, montrer que :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad \forall (A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

3) A quelles condition la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, et donner son inverse. Justifier votre réponse.

4) On pose $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\det A \neq 0\}$, montrer que $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.

5) On pose $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\det A = 1\}$, montrer que $(\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

6) Dans toute la suite on pose $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Trouver deux réels a et b tels que $J^2 = aJ + bI_2$

b) En deduire que $\mathcal{J} = \{\alpha J + \beta I_2$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

c) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'existence de a_n, b_n tel que $J^n = a_nJ + b_nI_2$, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} et a_n et b_n.

d) En déduire une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n, puis exprimer a_n et b_n en fonction de n.

e) En déduire l'expression de J^n.

f) On pose $A = J - I_2$ et $B = J - 3I_2$

i. Calculer A^2, B^2, en déduire A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii. Calculer AB.

iii. En déduire l'expression de J^n en fonction de J et I_2, puis comparer la avec celle trouvée dans la question 6.e)

Fin et bonne chance.