DS 3 : Suites numériques
Structures

Maths-PCSI
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Samedi 10 Décembre 2005.
Durée: 3heures 30mn.

CORRIGÉ

Exercice 1.

1) Non car par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sans que ces matrices ne soient nulles.

2) Simple calcul à effectuer.

3) A est inversible *si et seulement si* $\det(A) = ad - bc \neq 0$ et dans ce cas $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, la justification est faite dans le cours.

4) Fait aussi dans le cours.

5) On a l'élément neutre est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$, d'autre part si $\det(A) = \det(B) = 1$, on vérifie facilement que $\det(AB^{-1}) = 1$, d'où $AB^{-1} \in \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$, et enfin n'oublions pas que $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$

6) .

a) Tout calcul fait on trouve que $J^2 = 4J - 3I_2$.

b) Utiliser la propriété caractéristique des sous-anneau.
On a d'abord $I_2 \in \mathcal{J}$, prendre $\alpha = 0, \beta = 1$
Si $A = \alpha_1 J + \beta_1 I_2, B = \alpha_2 J + \beta_2 I_2$ deux éléments de $\mathcal{J}$, alors $A + B = (\alpha_1 + \alpha_2)J + (\beta_1 + \beta_2)I_2$ est aussi un élément de $\mathcal{A}$, et

$$\begin{aligned} AB &= (\alpha_1 J + \beta_1 I_2)(\alpha_2 J + \beta_2 I_2) \\ &= \alpha_1\alpha_2 J^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)J + \beta_1\beta_2 I_2 \\ &= \alpha_1\alpha_2(4J - 3I_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)J + \beta_1\beta_2 I_2 \\ &= (4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)J + (\beta_1\beta_2 - 3\alpha_1\alpha_2)I_2 \end{aligned}$$

Donc $AB \in \mathcal{A}$.

c) Pour $n = 0$, prendre $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Supposons $J^n = a_n J + b_n I_2$, alors $J^{n+1} = (a_n J + b_n I_2)J = a_n J^2 + b_n J = a_n(4J - 3I_2) + b_n J = (4a_n + b_n)J - 3a_n I_2$, d'où $a_{n+1} = 4a_n + b_n, \quad b_{n+1} = -3a_n$.

d) $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 3a_n$, ainsi (a_n) est une suite récurrente linéaire dont l'équation caractéristique associée est $x^2 - 4x + 3 = 0$, dont les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 3$, d'où $a_n = \lambda + \mu 3^n$. λ et μ on les trouve à l'aide des conditions initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, d'où $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{1}{2}$. Ainsi $a_n = \dfrac{1}{2}(1 - 3^n)$ et $b_n = -3a_{n-1} = -\dfrac{3}{2}(1 - 3^{n-1})$.

e) $A^n = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)A + \dfrac{1}{2}(3 - 3^n)I_2$.

f) .

i. Tout calcul fait on trouve que : $A^2 = 2A, B^2 = -2B$, et on en déduit par récurrence que : $A^n = 2^{n-1}A$ et $B^n = (-2)^{n-1}B$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii. Tout calcul fait on trouve que : $AB = 0$.

iii. On a $J = \dfrac{1}{2}(3A - B)$, donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{2^n}(3A-B)^n \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k 3^k A^k (-1)^{n-k} B^{n-k} \\
&= \frac{1}{2^n}(3^n A^n + (-1)^n B^n) && \text{car } AB = 0 \\
&= \frac{1}{2}(3^n A - B) && \text{car } A^n = 2^{n-1}A \\
& && B^n = (-2)^{n-1}B \\
&= \frac{1}{2}(3^n(J - I_2) - (J - 3I_2)) \\
&= \frac{1}{2}((3^n - 1)J + (3 - 3^n)I_2)
\end{aligned}$$

Exercice 2

1)

$$I_0 = 1, I_1 = \int_0^1 (1-t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}, J_0 = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

2) a)

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 ((1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n)dt \\
&= \int_0^1 (1-t^2)^n(1 - t^2 - 1)dt \\
&= -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \leq 0
\end{aligned}$$

donc la suite (I_n) est décroissante.

b) (I_n) est décroissante minorée par 0, car $(1-t^2)^n \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$, donc converge, d'autre part $0 \leq (1-t^2)^n \leq 1 \quad \forall t \in [0,1]$, donc $0 \leq I_n \leq 1$, d'où $0 \leq l = \lim\limits_{+\infty} I_n \leq 1$.

c) $I_n = \displaystyle\int_0^a (1-t^2)^n dt + \int_a^1 (1-t^2)^n dt \leq a + (1-a)(1-a^2)^n$ car $(1-t^2)^n \leq 1$ sur $[0,a]$ et $(1-t^2)^n \leq (1-a^2)^n$ sur $[a,1]$, or $\lim\limits_{+\infty}(1-a^2)^n = 0$ car $0 < (1-a^2) < 1$ d'où $l = \lim\limits_{+\infty} I_n \leq a$

Ainsi $l \leq a \quad \forall a \in]0,1[$ d'où $l \leq 0$ or $l \geq 0$ d'où $l = 0$.

3) a) On pose dans J_n, $\quad u = t, \quad v' = t(1-t^2)^n$

$\quad u' = 1, \quad v = -\dfrac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}$

Donc $J_n = [uv]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u'v = \frac{I_{n+1}}{2(n+1)}$

b) $I_n - J_n = I_{n+1}$

En particulier $I_{n+1} = I_n - \dfrac{I_{n+1}}{2(n+1)}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad I_n &= \left(1 + \frac{1}{2(n+1)}\right) I \\
&= \left(\frac{2n+3}{2n+2}\right) I_{n+1} \\
\Longrightarrow \quad I_{n+1} &= \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right) I_n
\end{aligned}$$

c) Le résultat est vrai pour $n = 0$.

Supposons $I_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, alors

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right) I_n \\
&= \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right) \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n}4(n+1)^2(n!)^2}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)} \\
&= \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}
\end{aligned}$$

Fin et à la prochaine.