Etude d'une suite récurrente

Préliminaire : Etablir que pour tout réel $x > -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

a et δ désignent deux réels de l'intervalle $]0,1[$.

Dans ce problème on étudie une suite (u_n) telle que $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \delta u_n (1 - u_n).$$

1.a Pour tout entier naturel n, exprimer $1 - u_{n+1}$ en fonction de $1 - u_n$ et de $1 - \delta u_n$.

1.b Montrer que la suite (u_n) est à valeurs dans $[a,1]$.

1.c Etudier la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la rapidité de convergence de la suite (u_n).

2.a Montrer que pour tout entier naturel n : $1 - u_{n+1} \leq q(1 - u_n)$ avec $q = 1 - a\delta$.

2.b En déduire que $1 - u_n \leq (1-a)q^n$.

2.c On pose pour tout entier naturel n, $x_n = \dfrac{1 - u_n}{(1-\delta)^n}$.

En observant que $\ln x_{k+1} - \ln x_k = \ln \dfrac{1 - \delta u_k}{1 - \delta}$, établir que $0 \leq \ln x_{k+1} - \ln x_k \leq \dfrac{\delta}{1-\delta}(1-a)q^k$.

On pourra notamment exploiter le résultat du préliminaire.

2.d On pose pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln x_{k+1} - \ln x_k\right)$.

Montrer que la suite (S_n) converge. On pose $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$.

2.e Déduire des questions précédentes l'existence d'un réel μ strictement positif tel que :

$1 - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \mu(1-\delta)^n$.

On explicitera la valeur de μ en fonction de S et de a.

3. On pose pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{u_n}{(1-u_n)(1+\delta)^n}$.

3.a Montrer que pour tout entier naturel k : $\dfrac{y_{k+1}}{y_k} = 1 + \dfrac{\delta^2 u_k}{(1+\delta)(1-\delta u_k)}$.

3.b En considérant $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln y_{k+1} - \ln y_k$, établir que : $0 \leq \ln\left(\dfrac{(1-a)u_n}{a(1-u_n)(1+\delta)^n}\right) \leq n\dfrac{\delta^2}{1-\delta^2}$.

4. Etant donné, un réel x, on note $[x]$ sa partie entière.

4.a Comparer $\left[\dfrac{t}{\delta}\right]\delta$, t et $\left(\left[\dfrac{t}{\delta}\right]+1\right)\delta$.

4.b Déterminer $\lim_{\delta \to 0} \delta\left[\dfrac{t}{\delta}\right]$ et $\lim_{\delta \to 0}(1+\delta)^{[t/\delta]}$.

4.c En déduire $\lim_{\delta \to 0} u_{[t/\delta]}$.