Etude d'une suite définie implicitement

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
L'objectif du problème est d'étudier les solutions des équations $(E_p): \ln x + x = p$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

<u>*Partie I - Etude de la suite des solutions*</u>

1. Montrer que l'équation (E_p) possède une unique solution et que celle-ci appartient au segment $[1, p]$.
   Dans la suite du problème, cette solution sera notée x_p.

2. Montrer que la suite $(x_p)_{p\geq 1}$ est croissante.

3.a Montrer que $\dfrac{\ln x_p}{p} \underset{p\infty}{\longrightarrow} 0$ et en déduire $x_p \underset{p\infty}{\sim} p$.

3.b Déterminer la limite de $x_{p+1} - x_p$.

4.a Donner un équivalent simple à $\ln x_p$.
   En déduire $x_p = p - \ln p + o(\ln p)$.

4.b On pose $y_p = x_p - p + \ln p$.
   Donner un équivalent simple à y_p.
   En déduire $x_p = p - \ln p + \dfrac{\ln p}{p} + o\left(\dfrac{\ln p}{p}\right)$.

<u>*Partie II - Approximation numérique de*</u> x_p

Dans cette partie, l'entier p est fixé.

1. Montrer que $\forall x \geq 1, \ln x \leq x - 1$.

2. Soit $f: \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = p - \ln x$.

2.a Montrer que f est décroissante et que x_p est le seul point fixe de f [(1)]

2.b Soit $a \in [1, p]$ et (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = p - \ln u_n \end{cases}$$
   Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, p]$.

2.c Justifier la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis leur convergence.

2.d On pose $\alpha = \lim\limits_{n\infty} u_{2n}$ et $\beta = \lim\limits_{n\infty} u_{2n+1}$.
   Justifier que $\alpha, \beta \in [1, p]$ puis que $f(\alpha) = \beta$ et $f(\beta) = \alpha$.

2.e En observant que la fonction $x \mapsto x - \ln x$ est strictement croissante sur $[1, p]$, établir que $\alpha = \beta$.

2.f En déduire que $u_n \to x_p$.

3. On reprend les notations précédentes en se plaçant dans le cas $p = 2$ et en prenant $a = 1$.

3.a Représenter sur un graphique d'unité 4 cm la construction des termes u_k pour $k \in \{0,1,2,\ldots,6\}$.

3.b Déterminer la valeur décimale par défaut de x_2 à la précision 10^{-2}.
   On précisera la démarche qui a permis d'obtenir celle-ci

---

(1) On appelle point fixe d'une fonction f tout x tel que $f(x) = x$.