Problème I

Partie I

1) **Posons $f_p(x) = \ln x + x - p$, elle est continue sur $[1,p]$ avec $f_p(1).f_p(p) = (1-p)\ln p \leq 0$, d'aprés le TVI l'équation $f_p(x) = 0$ admet au moins une solution, d'autre part f_p est strictement croissante sur $[1,p]$ ($f_p'(x) = \dfrac{1}{x}+1$), donc cette solution est unique.**

2) **$f_{p+1}(x_p) = f_p(x_p) - 1 = -1 \leq 0 = f_{p+1}(x_{p+1})$ et f_{p+1} est strictement croissante donc $x_p \leq x_{p+1}$.**

3) a) **$1 \leq x_p \leq p \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{\ln x_p}{p} \leq \dfrac{\ln p}{p} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f_p(x_p) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x_p}{p} = 1 - \dfrac{\ln x_p}{p} \longrightarrow 1$, d'où $x_p \sim p$.**

   b) **$f_p(x_p) = 0, f_{p+1}(x_{p+1}) = 0 \Longrightarrow x_p = p - \ln x_p, x_{p+1} = p+1 - \ln x_{p+1} \Longrightarrow x_{p+1} - x_p = \ln \frac{x_p}{x_{p+1}} + 1$ or $\dfrac{x_p}{x_{p+1}} \sim \dfrac{p}{p+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $x_{p+1} - x_p \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$**

   c) **Montrons que $\ln x_p \sim \ln p$, en effet $\dfrac{\ln x_p}{\ln p} = \dfrac{\ln x_p - \ln p + \ln p}{\ln p} = \dfrac{\ln \frac{x_p}{p}}{\ln p} + 1 \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$, ainsi $\ln x_p \sim \ln p$, d'où $\ln x_p = \ln p + o(\ln p)$, d'où $x_p = p - \ln x_p = p - \ln p + o(\ln p)$.**

   d) **De la même façon on montre que $y_p \sim \dfrac{\ln p}{p}$**

Partie II

1) **Étudier la fonction $\ln x - x + 1$ sur $[1, +\infty[$.**

2) a) **f est décroissante car $f'(x) = -\dfrac{1}{x} \leq$. x point fixe de f *si et seulement si* $f(x) = x$ *si et seulement si* $\ln x + x = p$ *si et seulement si* $x = x_p$ d'aprés Partie I, 1)**

   b) **Par récurrence pour $n = 0, u_0 = a \in [1,p]$, supposons $u_n \in [1,p]$, comme f est décroissante, $1 \leq \ln p - 1 \leq f(p) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(1) = p$.**

   c) **$u_{2n+2} = f \circ f u_{2n}$, avec $f \circ f$ croissante, on compare juste u_0 et u_2 si $u_0 \leq u_2$, on montre facilement que u_{2n} est croissante, dans le cas contraire elle est croissante, dans tous les cas elle est monotone, de même u_{2n+1} est monotone et toutes les deux bornées entre 1 et p, donc convergent.**

   d) **$1 \leq u_{2n} \leq p$ par passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $1 \leq \alpha \leq p$ et de même $1 \leq \beta \leq p$. D'autre part $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ au passage à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ et comme f est continue donc $\beta = f(\alpha)$, de même puisque $u_{2n} = f(u_{2n-1})$, on obtient $\alpha = f(\beta)$.**

   e) **On a $\beta = f(\alpha) = p - \ln \alpha$ et $\alpha = f(\beta) = p - \ln \beta$, en faisant la différence on obtient $\beta - \alpha = \ln \beta - \ln \alpha$, donc $\beta - \ln \beta = \alpha - \ln \alpha$, or l'application $x \mapsto x - \ln x$ est strictement croissante donc bijective d'où $\alpha = \beta$.**

   f) **D'abord on a $f(\alpha) = \alpha$ donc $\alpha = x_p$, d'aprés II.2.a) puis utiliser le résultat qui dit que si (u_{2n}) et (u_{2n}) convergent vers la même limite, alors (u_n) fait pareil.**