Problèmes de Mathématiques

PCSI

Erwan Biland

Lycée Stanislas, classe de PCSI 1, 2007/2008

Ce recueil de problèmes est destiné à accompagner le cours de mathématiques pendant toute l'année de PCSI. Il contient la plupart des problèmes posés aux élèves de PCSI 1, en temps libre ou en temps limité, depuis 2005. J'y puiserai les devoirs que vous aurez à traiter cette année en temps libre (par groupes de deux).

Malgré les nombreuses correction déjà effectuées, il subsiste certainement des erreurs d'énoncé ou d'orthographe... Je vous remercie par avance de me les signaler au fur et à mesure de leur découverte.

J'ai fait apparaître en italique, dans la table des matière ainsi que dans l'en-tête de chaque problème, les parties du cours qui y sont abordées.

J'ai aussi essayé, autant que possible, d'apprécier la difficulté de chaque problème en lui affectant un nombre d'étoiles ✻ compris entre zéro (très facile) et quatre (très difficile). Attention, dans un problème coté à trois étoiles (difficile), s'il est très progressif, les premières questions peuvent être, malgré tout, relativement faciles.

Bon courage !

Table des matières

Ensembles de nombres, suites numériques

Etude locale des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Convexité, intégration, révisions d'analyse

Ensembles, groupes, anneaux, corps

Problème 1

Sommes de puissances de n entiers

[Récurrence, résolution de systèmes, polynômes]

Pour tout entier positif ou nul $n \in \mathbb{N}$, on définit les nombres :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} 1 = 1 + 1 + \ldots + 1 \\ \beta_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + \ldots + n \\ \gamma_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + \ldots + n^2 \\ \delta_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} k^0 = 0^3 + 1^3 + \ldots + n^3 \end{aligned}$$

1 - Préciser les valeurs de α_0, β_0, γ_0 et δ_0.

2 - Déterminer les valeurs de α_n et β_n en fonction de n.

3 - Démontrer par récurrence sur l'entier n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4 - On admet qu'il existe cinq nombres réels a, b, c, d, e tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \delta_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e \quad (\star).$$

a) Déterminer ces cinq nombres. Vous devez en particulier démontrer qu'ils sont caractérisés de façon unique par la propriété $(\star)$.
[Vous serez probablement amenés à résoudre un système de 4 ou 5 équations avec le même nombre d'inconnues. Vous devrez présenter **très clairement** *ce système et les calculs permettant de le résoudre.]*
b) Factoriser autant que possible l'expression de δ_n ainsi obtenue.

Problème 2 ✻

Calcul de sommes et de produits

[Suites numériques, fonctions trigonométriques]

A - Séries géométriques et application

1 - Soit q un nombre complexe différent de 1, et $n \in \mathbb{N}$ un entier positif ou nul. Rappeler, sans démonstration, la valeur de $A_n = \sum_{k=0}^{n} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

2 - Soient a et b deux nombres réels fixés. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les nombres réels :

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) &= \cos a + \cos(a+b) + \ldots + \cos(a+nb) \\ S_n &= \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb) &= \sin a + \sin(a+b) + \ldots + \sin(a+nb) \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de l'entier n, les valeurs de C_n et S_n.
*[Indication : on pourra poser $E_n = C_n + iS_n$, et calculer E_n en utilisant le **1**, sans oublier le cas $b \equiv 0\ [2\pi]$.]*

On poussera les calculs jusqu'à obtenir $C_n = \frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}} \cos(a+nb)$, et une expression du même type pour S_n.

B - Un produit astucieux

1 - En étudiant la fonction «sinh» au voisinage de 0, déterminer $\lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{\sinh t}{t}$.

2 - Soit x un nombre réel non nul. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \cosh \frac{x}{2^k} = \cosh x \cdot \cosh \frac{x}{2} \cdot \ldots \cdot \cosh \frac{x}{2^n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n \sinh \frac{x}{2^n}$. En déduire une expression simple de P_n.

3 - Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite réelle que l'on déterminera.

Problème 3 ✻

Autour d'une suite de fonctions

[Fonctions usuelles, suites numériques]

Pour tout entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'application

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}(\ln x)^n \end{array}.$$

On notera $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendre comme unité 2 cm).

1 - On fixe (provisoirement) l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. Dans l'étude de la fonction f_n, on sera bien sûr amené à discuter selon la valeur du paramètre n.

a) Etudier le comportement de l'application f_n aux voisinages de 0 et de $+\infty$, ainsi que le comportement au voisinage de $+\infty$ de l'application $x \mapsto \frac{f_n(x)}{x}$.

b) Etudier les variations de l'application f_n. Préciser tous les points où la courbe $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale ou verticale.

c) Etudier le signe des applications $f_{n+1} - f_n$ et $f_{n+2} - f_n$. En déduire les points d'intersections et les positions respectives des courbes $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}_{n+1}$ et $\mathscr{C}_{n+2}$.

d) Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.

2 - Soit maintenant $x \in [1, +\infty[$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = f_n(x)$. Etudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3 - a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $\alpha_n \in [1, +\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$.

b) Montrer que de plus : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \alpha_n \in]1, e[$.

c) En utilisant la question **1c)**, montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

d) En utilisant la question **2**, montrer que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

4 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e f_n(t)dt$.

a) Etudier le signe et la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (on ne cherchera pas à calculer l'intégrale !).

b) Grâce à une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n+1}.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{e\sqrt{e}}{n+\frac{5}{2}} \leqslant I_n \leqslant \frac{e\sqrt{e}}{n+1}$.

d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite en $+\infty$ (que l'on précisera).

Problème 4 ✻
Etude d'une fonction

[Fonctions trigonométriques]

Préliminaires...

1 - Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \ t \mapsto t \ln t$.

a) Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On établira en particulier l'existence d'un minimum de la fonction g, en précisant sa valeur et le point où il est atteint.

b) Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.

[On pourra rappeler sans démonstration et utiliser le résultat du cours sur $\lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y}$.]

c) Donner une allure de la courbe représentative de g, à l'aide uniquement des résultats des deux questions précédentes.

2 - Soit $h :]0, 1[\to \mathbb{R}, \ t \mapsto \frac{\ln(4-t)}{\ln t}$.

a) Justifier que h est bien définie et dérivable sur $]0, 1[$. Calculer sa dérivée.

b) A l'aide de la question 1, montrer que $\forall t \in]0, 1[, \ h'(t) < 0$.

c) En déduire le sens de variation, sur l'intervalle $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, de la fonction $k : x \mapsto \exp(h(4\cos^2 x))$.

[On veillera à rédiger très précisément le raisonnement, en n'oubliant pas de justifier la bonne définition de k.]

Vif du sujet

On considère la fonction f d'une variable réelle et à valeurs réelle définie par :

$$f(x) = \left(\sqrt{1 - \sin(2x)} + \sqrt{1 + \sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos x|}}.$$

3 - a) Pour quelles valeurs du réel x l'expression définissant $f(x)$ a-t-elle un sens ? On notera D l'ensemble de ces valeurs.

b) Etudier la parité et la périodicité de la fonction f.

4 - a) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\sqrt{1 - \sin(2x)} = |\sin x - \cos x|$.

b) Trouver une expression de $f(x)$ plus simple pour $x \in D \cap [0, \frac{\pi}{2}]$.

[On sera amener à donner différentes expression suivant la valeur de x.]

5 - a) Etudier les variations et les limites de f sur l'ensemble $D \cap [0, \frac{\pi}{2}]$.

[On pourra être amené à utiliser la question 2].

b) Donner une représentation graphique de f. On se placera dans un repère orthogonal direct, avec pour unité 3 cm sur l'axe des abscisse, et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

[Il est demandé une allure de la courbe, tracée très proprement, avec indication des asymptotes éventuelles. Mais vous n'êtes pas tenus à une précision inaccessible sans calculatrice.]

Problème 5 **

Résolution des équations du troisième degré

[Nombres complexes, relations entre coefficients et racines d'un polynôme]

1 - En guise de prologue...

On pose $A = \sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{13-5\sqrt{17}}{2}}$.

Trouver une équation du troisième degré, à coefficients entiers, dont A est solution. En déduire une expression simplifiée de A.

2 - Où l'on se ramène à une équation dite réduite

Soient a, b, c trois nombres complexes quelconques. On considère l'équation du troisième degré à l'inconnue $t \in \mathbb{C}$:

$$t^3 + at^2 + bt + c = 0 \quad (E).$$

Démontrer qu'en posant $z = t + \frac{a}{3}$, on peut établir une équation «réduite», équivalente à (E), du type :

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (R),$$

où p et q sont des nombres complexes que l'on précisera en fonction de a, b et c.

3 - Un lemme

Soient α et β deux nombres complexes quelconques. On pose selon l'usage $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Pour tout nombre complexe z, trouver une expression développée simple du produit :

$$(z + \alpha j + \beta j^2)(z + \alpha j^2 + \beta j).$$

En déduire que, pour tout nombre complexe z,

$$(z + \alpha + \beta)(z + \alpha j + \beta j^2)(z + \alpha j^2 + \beta j) = z^3 - 3\alpha\beta z + \alpha^3 + \beta^3.$$

4 - Une méthode de résolution des équations du troisième degré réduites

Soient p et q deux nombres complexes quelconques. Déduire de la question **3** une résolution sur $\mathbb{C}$ de l'équation réduite (R).

Indication : introduire des inconnues auxilliaires α et β (bien associées), dont les cubes α^3 et β^3 sont les racines sur $\mathbb{C}$ de l'équation de degré 2, dite équation résolvante :

$$Z^2 - qZ - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (Res).$$

5 - Quelques exemples

Résoudre, sur les corps des complexes, par la méthode précédente, les équations :

a) $z^3 - 3z + 2 = 0$.

b) $z^3 + 3z + 2 = 0$.

6 - A propos de la résolution sur $\mathbb{R}$ des équations du troisième degré à coefficients réels

Dans cette question, on suppose que p et q sont des nombres réels.

Préciser, en discutant selon les valeurs de p et q, le nombre de racines réelles de l'équation :

$$z^3 + pz + q \quad (R).$$

Lorsque cette équation possède une seule racine réelle, exprimer celle-ci en fonction des réels p et q.

7 - Application à la géométrie des heptagones réguliers

a) Soit θ un nombre réel quelconque. Exprimer $\sin(7\theta)$ polynomialement en fonction de $\sin\theta$.

a) Démontrer que la résolution de l'équation, à l'inconnue réelle θ :

$$\sin(7\theta) = 0$$

conduite à une équation du troisième degré en $\sin^2\theta$.

b) On désigne par α, β et γ les longueurs (distinctes) des côtés des trois heptagones réguliers que l'on peut inscrire dans le cercle trigonométrique. Déduire de la question précédente que α^2, β^2 et γ^2 sont les racines de l'équation :

$$z^3 - 7z^2 + 14z - 7 = 0.$$

[On aura intérêt à faire dessin pour bien comprendre la question. On précise que les côtés d'un heptagone régulier sont autorisés à se croiser ; on obtient alors une figure qui fait penser à une étoile.]

c) Démontrer que l'équation $z^3 - 5z^2 + 6z - 1 = 0$ admet pour racines : $4\cos^2\frac{\pi}{7}$, $4\cos^2\frac{2\pi}{7}$ et $4\cos^2\frac{4\pi}{7}$.

Problème 6 **

Matrices et homographies complexes

[Matrices, déterminant, nombres complexes, géométrie]

A - Matrices carrées d'ordre 2

Une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ est un tableau M contenant quatre nombres complexes a, b, c, d, appelés coefficients de M, et noté :

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

On dit que deux matrices sont égales si elles ont les mêmes coefficients. On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1 - Multiplication des matrices

Soient $M = \operatorname{mat} abcd$ et $M' = \operatorname{mat} a'b'c'd'$ deux matrices. On appelle produit de M et M', et on note $M \cdot M'$, la matrice définie par :

$$M \cdot M' = \begin{bmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{bmatrix}.$$

Graphiquement, les calculs s'effectuent de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \mathbf{a'} & b' \\ \mathbf{c'} & d' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{aa' + bc'} & \\ & \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad \text{puis} \quad \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a' & \mathbf{b'} \\ c' & \mathbf{d'} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ c & d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} aa' + bc' & \mathbf{ab' + bd'} \\ & \end{bmatrix} \end{array} \quad ; \quad \text{etc.}$$

a) On pose : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$.
Calculer les produits : $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot C$, $C \cdot B$, $C \cdot C$.
Culture : la multiplication des matrices que l'on vient de définir est une opération associative, c'est-à-dire que, pour toutes matrices M, M', M'', on a : $(M \cdot M') \cdot M'' = M \cdot (M' \cdot M'')$.

b) La multiplication des matrices est-elle une opération commutative ?
[Rappel : la multiplication des matrices est dite commutative si, et seulement si, pour toutes matrices M et M', on a $M \cdot M' = M' \cdot M$.]

c) Montrer qu'il existe une unique matrice $I = \operatorname{mat} efgh$, dont on précisera les coefficients, telle que, pour toute matrice M,

$$M \cdot I = M$$

[Indication : en supposant l'existence d'une telle matrice I, on pourra calculer le produit $A \cdot I$, où A est la matrice définie à la question **a**.*]*

d) Montrer que, pour toute matrice M, $I \cdot M = M$.

2 - Déterminant

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice. On appelle déterminant de M le réel, noté $\det(M)$, défini par :

$$\det(M) = ad - bc.$$

a) Calculer le déterminant des matrices A, B, C, I définies précédemment.

b) Montrer que, pour toutes matrices M et M', on a :

$$\det(M \cdot M') = \det(M)\det(M').$$

c) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice telle que $\det(M) \neq 0$. On note $\Delta = \det(M)$. Montrer qu'il existe une unique matrice M' telle que : $M \cdot M' = I$, et que cette matrice est :

$$M' = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}.$$

Cette unique matrice M' sera dorénavant appelée inverse de M ; on notera $M' = M^{-1}$.

d) Montrer que $M^{-1} \cdot M = I$.

e) Si $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est une matrice et $\lambda \in \mathbb{C}$, on note λM la matrice $\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$.
Exprimer $\det(\lambda M)$ en fonction de λ et $\det(M)$.

B - Homographies du plan complexe

On note ici $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\omega\}$, avec $\omega \notin \mathbb{C}$ (pas d'autre hypothèse sur l'élément ω).

1 - Définitions

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice telle que $\det(M) \neq 0$. On définit l'application $h_M : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, appelée homographie associée à la matrice M, de la façon suivante :

Cas 1 : si $c = 0$, pour tout $z \in \bar{C}$, on pose $\quad h_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \,; \\ \omega & \text{si } z = \omega. \end{cases}$

On dit que h_M est une similitude (directe).

Cas 2 : si $c \neq 0$, pour tout $z \in \bar{C}$, on pose $\quad h_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \,; \\ \omega & \text{si } z = -\frac{d}{c} \,; \\ \frac{a}{c} & \text{si } z = \omega. \end{cases}$

On dit que h_M est une homographie non dégénérée.

a) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice de déterminant non nul, et λ un complexe non nul. Montrer que les homographies $h_{\lambda M}$ et h_M sont égales.

b) Soient $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $M' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ deux matrices de déterminants non nuls. On suppose de plus $c \neq 0$ et $c' \neq 0$. On note $N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ le produit $M \cdot M'$. Montrer (soigneusement) que :

$$h_M \circ h_{M'} = h_N.$$

On admet que ce résultat reste vrai si $c = 0$ ou $c' = 0$.

c) Que dire de l'homographie h_I, où I est la matrice définie à la question **1-1c)** ?

d) Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice de déterminant non nul. Montrer que $h_M : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ est une application bijective, et préciser son application réciproque.

[Indication : on pourra rechercher une homographie $h_{M'}$ telle que $h_M \circ h'_M = h_{m'} \circ h_M = Id_{\bar{\mathbb{C}}}$.]

2 - Les homographies sont 3-transitives

Pour les question **a** *et* **b**, *on acceptera des réponses sans justification.*

a) Déterminer *une* matrice D, dont on précisera les coefficients, telle que l'homographie h_D vérifie :

$$h_D(0) = \omega \quad \text{et} \quad h_D(1) = 1 \quad \text{et} \quad h_D(\omega) = 0.$$

b) Déterminer *une* matrice E, dont on précisera les coefficients, telle que l'homographie h_E vérifie :

$$h_E(0) = 1 \quad \text{et} \quad h_E(1) = i \quad \text{et} \quad h_E(\omega) = \omega.$$

c) Soient x, y, z trois éléments distincts de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une unique homographie $h : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ telle que :

$$h(0) = x \quad \text{et} \quad h(1) = y \quad \text{et} \quad h(\omega) = z.$$

Montrer que ce résultat reste vrai si x, y ou z est égal à ω.

[Attention : c'est l'homographie qui est unique, pas la matrice qui la définit.]

d) Soient x, y, z trois points distincts de $\mathbb{C}$, et x', y', z' trois point distincts de $\bar{\mathbb{C}}$. Montrer qu'il existe une unique homographie h telle que :

$$h(x) = x' \quad \text{et} \quad h(y) = y' \quad \text{et} \quad h(z) = z'.$$

[Indication : on pourra penser à écrire $h = h_1 \circ (h_2^{-1})$, où h_1 et h_2 sont des homographies bien choisies, à l'aide de la question **c**.*]*

C - Cocyclicité

On appelle cycle-droite de $\bar{\mathbb{C}}$ toute partie de $\bar{\mathbb{C}}$ du type $\bar{\Delta} = \Delta \cup \{\omega\}$, où Δ est une droite du plan complexe $\mathbb{C}$. On appelle cycle de $\bar{\mathbb{C}}$ toute partie de $\bar{\mathbb{C}}$ qui est, soit un cercle du plan complexe $\mathbb{C}$, soit un cycle-droite. Enfin, on dit que quatre points z_1, z_2, z_3, z_4 de $\bar{\mathbb{C}}$ sont cocycliques s'ils appartiennent à un même cycle.

a) Les points $1, i, -1, -i$ sont-ils cocycliques ? Idem avec $1+i, 3+4i, 5+7i, \omega$; avec $0, 1, \omega, i$.

b) Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des éléments distincts de $\bar{\mathbb{C}}$. On appelle birapport de ces quatre éléments le nombre complexe :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_3 - z_4)}.$$

[Pour le cas où l'un des z_k est égal à ω, on pose par convention : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \frac{(\omega - z)}{(\omega - z')} = \frac{(z - \omega)}{(z' - \omega)} = 1$.]

Montrer que les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques si, et seulement si, leur birapport est dans $\mathbb{R}$.

[Note : on ne demande pas ici de redémontrer le cours !]

c) Soit $s : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ une similitude. Montrer que, si les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques, alors les points $s(z_1), s(z_2), s(z_3), s(z_4)$ le sont aussi.

d) Soit la matrice $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et h_D l'homographie qui lui est associée. Montrer que, si les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques, alors les points $h_D(z_1), h_D(z_2), h_D(z_3), h_D(z_4)$ le sont aussi.

e) Soit h une homographie quelconque. Montrer que, si les points z_1, z_2, z_3, z_4 sont cocycliques, alors les points $h(z_1), h(z_2), h(z_3), h(z_4)$ le sont aussi.

[Indication : on pourra montrer que, si h est une homographie non dégénérée, alors il existe des similitudes s et s' telles que $h = s \circ h_D \circ s'$.]

Problème 7 ✻

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

[Equations différentielles, résolution de système]

Soient A, B, C, D, x_0, y_0 des constantes réelles. Dans chacun des cas proposés, on demande :

(a) de déterminer l'ensemble de couples (x, y) de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = Ax(t) + By(t) \\ y'(t) = Cx(t) + Dy(t) \end{array} \right. \qquad (S).$$

(b) de déterminer l'unique couple (x, y) solution du système différentiel (S) et vérifiant de plus les conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad y(0) = y_0.$$

(c) d'étudier et de représenter graphiquement la courbe plane Γ paramétrée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right. .$$

Cette courbe est appelée caractéristique du système (S) avec les conditions initiales (x_0, y_0).

1 - On fixe ici un réel λ. On pose :

$$A = 1 \quad ; \quad B = C = 0 \quad ; \quad D = \lambda \quad \text{et} \quad x_0 = y_0 = 1$$

Indication : on sera amené à distinguer les cas $\lambda > 1$, $\lambda = 1$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.

2 - On fixe un réel a. On pose :

$$A = D = a \quad ; \quad B = -1 \quad ; \quad C = 1 \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0$$

Indication : on essaiera de se ramener à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre ; on sera amené à distinguer les cas $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.

3 - On pose :

$$A = C = D = 1 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = 1 \quad \text{et} \quad x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0$$

Indication : là encore, on essaiera de se ramener à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

Dans chaque cas, si on le souhaite, on pourra représenter, à côté de la caractéristique demandée, d'autres caractéristiques (correspondant à d'autres conditions initiales).

Problème 8 **

Une équation fonctionnelle, des équations différentielles

[Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, équations différentielles]

On note $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y).$$

A – Généralités

1 - Démontrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ n'est pas vide.

2 - Soit f un élément quelconque de l'ensemble $\mathscr{E}$.
a) On suppose que $f(0) = 0$. Déterminer la fonction f.
b) On suppose que $f(0) \neq 0$. Calculer $f(0)$, et étudier la parité de l'application f.
c) Soit α un réel quelconque. Montrer que l'application $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{K},\ t \mapsto f(\alpha t)$ est aussi un élément de l'ensemble $\mathscr{E}$.

B – Eléments de $\mathscr{E}$ au moins deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$

Soit f un élément de $\mathscr{E}$ au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et tel que $f(0) \neq 0$.

1 - Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels, $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$.

2 - En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{K}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f''(t) - cf(t) = 0.$$

3 - Déterminer la fonction f dans chacun des cas suivants :
a) si $c = 0$;
b) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $c > 0$;
c) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $c < 0$;
d) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $c \neq 0$ (on pourra noter ω une racine carrée complexe du nombre c).

C – Eléments de $\mathscr{E}$ continus sur $\mathbb{R}$

Soit f une fonction élément de $\mathscr{E}$ et continue sur $\mathbb{R}$. On note $F : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ celle des primitives de f qui s'annule en 0.

1 - Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x+y) + F(x-y) = F(x)f(y)$.

2 - En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est dérivable deux fois.

3 - Conclure.

Problème 9 ✻

Un problème de raccordement de solutions

[Equations différentielles]

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$(1-x)y' + xy = e^x \quad (E).$$

Les solutions recherchées sont à valeurs réelles.

On considérera les intervalles $I_- =]-\infty, 1[$ et $I_+ =]1, +\infty[$.

1 - Soit $I = I_-$ ou I_+, et $a : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in I \quad a(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Déterminer une primitive de a sur l'intervalle I.

2 - Résoudre, séparément sur les intervalles I_- et I_+, l'équation différentielle

$$(1-x)y' + xy = 0 \quad (H).$$

On simplifiera au maximum l'expression des fonctions solutions.

3 - Résoudre, séparément sur les intervalles I_- et I_+, l'équation différentielle (E). On utilisera au moins une fois la méthode de variation de la constante.
On notera respectivement $\mathscr{S}_{I_-}$ et $\mathscr{S}_{I_+}$ les ensembles de solutions.

4 - Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et solutions de l'équation (E).

5 - Pour tout réel k, montrer qu'il existe une unique fonction $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $f_k(0) = k$.

6 - Etudier, pour tout réel k, la fonction f_k (limites, asymptotes, branches paraboliques, variations, tangente au point d'abscisse 1). Représenter graphiquement les fonctions f_0, f_1 et f_2.

Problème 10
Une équation différentielle linéaire d'ordre 4

[Equations différentielles]

On considère l'équation différentielle d'ordre 4 :

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \quad (E).$$

Rappelons que $y^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de la fonction y.

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables au moins quatre fois et solutions de (E).

1 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^4 - 2X^2 + 1 = 0$.

2 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable au moins quatre fois. Montrer que f est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction $g = f'' - f$ est solution d'une équation différentielle linéaire (E') d'ordre 2 que l'on précisera.

3 - Résoudre l'équation (E').

4 - Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions à valeurs réelles de l'équation (E).

Problème 11 **

Déterminant, wronskien

[Equations différentielles, algèbre linéaire]

Dans tout le problème, on notera $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, on pose :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Déterminant et systèmes

Soit $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{K}^6$. On considère le système de deux équations à deux inconnues complexes :

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad (S).$$

On pose $\det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

1 - On suppose ici $\det(S) \neq 0$. En utilisant des combinaisons judicieuses des lignes du système (S), montrer qu'il admet un unique couple solution (x_0, y_0). On exprimera x_0 et y_0 en fonction des complexes $\det(S)$, $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$.

2 - On suppose maintenant $\det(S) = 0$.
a) Montrer que le système «homogène»

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \quad (H)$$

admet au moins un couple solution (x, y) non nul (c'est-à-dire tel que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$).
On pourra traiter à part le cas $a = b = c = d = 0$.
b) En déduire que, si le système (S) admet une solution, alors celle-ci n'est pas unique.

3 - Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit α un nombre complexe fixé. On considère le système

$$\begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 1 \\ 2x - 2iy = \alpha \end{cases} \quad (S).$$

Déterminer l'ensemble des solutions du système (S).
On sera amené à distinguer des cas selon la valeurs de α.

Propriétés algébriques

4 - Soient $a, b, c, d, c', d', \lambda$ des éléments de $\mathbb{K}$. Exprimer très simplement, en fonction de $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}$ et λ, les nombres :

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c + c' & d + d' \end{vmatrix}.$$

5 - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a, b, c, d des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$. On définit la fonction $D : I \to \mathbb{K},\ t \mapsto \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}$. Justifier la dérivabilité de la fonction D, et exprimer, pour tout $t \in I$, le nombre dérivé $D'(t)$ en fonction de $\begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}$.

Wronskien de deux fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f, g deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On appelle wronskien du couple (f, g) la fonction notée $w_{f,g}$, ou simplement w :

$$w : I \to \mathbb{R}, \ t \mapsto \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

6 - On fixe des réels r, s, α, ω. Calculer le wronskien w des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

a) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{rt}$ et $g(t) = e^{st}$.
b) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{rt}$ et $g(t) = te^{rt}$.
c) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t$ et $g(t) = e^{\alpha t} \sin \omega t$.

7 - Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle à coefficients non constants :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (E).$$

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, au moins deux fois dérivables sur I, et solutions de l'équation (E).

a) Montrer que le wronskien w de f et g est solution d'une équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants que l'on précisera.
b) En déduire que si le wronskien w s'annule en au moins un point $t_0 \in \mathbb{R}$, alors il est identiquement nul sur $\mathbb{R}$.

Notion de couple libre ou lié de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\tilde{0} : I \to \mathbb{R}$ l'application nulle. Etant données deux fonctions quelconques f et g de I dans $\mathbb{R}$, on dit que le couple (f, g) est lié si :

$$f = \tilde{0} \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ g = \lambda f.$$

Dans le cas contraire, on dit que le couple (f, g) est libre.

8 - a) Ecrire, à l'aide de quantificateurs, la proposition : «le couple (f, g) est libre».
b) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto 2007t$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ t \mapsto 2008t$. Le couple (f, g) est-il libre ou lié ?
c) Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \ t \mapsto t$ et $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \ t \mapsto \frac{1}{t}$. Le couple (f, g) est-il libre ou lié ?

9 - a) Montrer que, si le wronskien w de f et g n'est pas la fonction nulle, alors le couple (f, g) est libre.
b) On suppose ici que la fonction f *ne s'annule pas* sur l'intervalle I. Montrer que, si le wronskien w de f et g est égal à la fonction nulle, alors le couple (f, g) est lié.

Problème 12
Autour d'une hyperbole équilatère

[Géométrie plane, coniques]

Soit $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan, et H la partie du plan dont une équation cartésienne dans le repère $\mathscr{R}$ est : $x^2 - y^2 = 1$.

1 - Démontrer que H admet deux axes de symétries Δ et Δ' que l'on précisera.

2 - On pose $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
Démontrer que le repère $\mathscr{R}' = (O, \overrightarrow{u_{\frac{\pi}{4}}}, \overrightarrow{v_{\frac{\pi}{4}}})$ est orthonormal, et donner une équation cartésienne de l'ensemble H dans ce repère.
On notera (X, Y) les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$.

3 - Donner, dans le repère $\mathscr{R}'$, des équations cartésiennes des droites Δ et Δ'.

4 - Montrer que, dans le repère $\mathscr{R}'$, l'ensemble H est la courbe représentative d'une fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

5 - Soit A le point de H dont l'abscisse (dans le repère $\mathscr{R}'$) est 1. On note D la tangente à la courbe H au point A.
Déterminer une équation de D dans le repère $\mathscr{R}'$, puis dans le repère $\mathscr{R}$.
En déduire, dans le repère $\mathscr{R}$, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{t}$ unitaire et tangent à la courbe H au point A.

6 - Sur un dessin, (unité 3 cm), Représenter les deux repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$, l'ensemble H, les axes Δ et Δ', la droite D et le vecteur $\overrightarrow{t}$.
Note : si vous avez eu l'idée de commencer par lire l'énoncé jusqu'au bout, vous aurez aussi sûrement celle de faire une ébauche de dessin, au moins au brouillon, bien avant la question 6...

Problème 13 ✻

Une corne de gazelle

[Courbes paramétrées]

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée, en coordonnées cartésiennes, par :

$$x(t) = \frac{\sin^2 t}{2 + \sin t} \quad ; \quad y(t) = \cos t.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on notera $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$.

a) Préciser le domaine de définition des fonctions x et y et montrer qu'on peut restreindre le domaine d'étude à $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On indiquera clairement la ou les tranformation(s) nécessaire(s) pour obtenir le tracé définitif de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Etudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle I, et montrer qu'il existe un unique $t_0 \in I$ (que l'on précisera) tel que la courbe $\mathscr{C}$ soit singulière au point $M(t_0)$. On déterminera aussi les tangentes horizontales et/ou verticales de $\mathscr{C}$.

c) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède une tangente Δ au point $M(t_0)$, et donner une équation cartésienne de Δ.

d) Pour tout $t \in I$, déterminer la position du point $M(t)$ par rapport à la droite Δ.
Indication : pour mener les calculs au bout, on pourra introduire le réel $T = \tan \frac{t}{2}$.

e) Tracer, aussi précisément que possible, l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ (unité : 6 cm)

Problème 14 ✻

Des problèmes de lieux

[Géométrie plane, coniques, courbes paramétrées]

Les deux exercices proposés sont totalement indépendants.

A - Construction d'une parabole à la règle et au compas

Soit a un réel strictement positif fixé. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit F le point de coordonnées cartésiennes $(0, a)$. On note $\mathscr{P}$ la parabole de foyer F et de directrice (Ox).

a) Déterminer une équation cartésienne de la parabole P.

b) Si M est un point de $\mathscr{P}$, on note Q le projeté orthogonal du point F sur la tangente à $\mathscr{P}$ au point M. Faire une figure propre. Déterminer le lieu du point Q lorsque le point M décrit la parabole $\mathscr{P}$.
On utilisera un paramétrage de la parabole $\mathscr{P}$; on obtiendra une droite.

c) Retrouver le résultat précédent par un raisonnement géométrique.

d) On garde les notations de la question **b)** . On suppose connaître le point Q. Expliquer comment contruire, à la règle et au compas, et à partir des points Q, F et de la droite (Ox), le point M.

B - Lieu de l'orthocentre d'un triangle dans une ellipse

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse, F et F' ses foyers. Un point M décrit $\mathscr{E}$. On veut déterminer le lieu $\mathscr{L}$ de l'orthocentre H du triangle FMF'.

a) Faire un dessin (non noté mais indispensable). Démontrer que $\mathscr{L}$ possède deux axes de symétrie.

b) On note a le demi-grand axe et b le demi-petit axe de l'ellipse. Choisir un repére $\mathscr{R}$ adapté, puis un paramétrage cartésien de l'ellipse $\mathscr{E}$ dans ce repère. Préciser les coordonnées des foyers F et F', ainsi que l'excentricité e de l'ellipse. *[On ne demande pas de démonstration pour cette question.]*

c) Etant donné un point $M(t)$ de l'ellipse $\mathscr{E}$, déterminer les coordonnées $(X(t), Y(t))$ de l'orthocentre $H(t)$ du triangle $FM(t)F'$ (s'il existe).

d) Représenter aussi précisément que possible l'ellipse $\mathscr{E}$ et le lieu $\mathscr{L}$.

Problème 15 *

La strophoïde droite

[Géométrie plane, courbes paramétrées]

Problème : Etant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, et A un point fixé de $\mathscr{C}$, on cherche à représenter le lieu de l'orthocentre H du triangle OAM lorsque le point M décrit $\mathbb{C}$ (privé du point A et de son symétrique par rapport à O, pour la bonne définition de H).

1 - On note $a = OA$ le rayon non nul du cercle $\mathscr{C}$, et on se place dans le repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ centré en O et tel que $\overrightarrow{OA} = a\,\overrightarrow{i}$. On note B le symétrique de A par rapport à O. Etant donné $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\}$, on note $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure de l'angle orienté $\widehat{AOM}$.
Faire une figure propre.

2 - En remarquant que le triangle AOM est isocèle, déterminer, en fonction de θ, les coordonnées cartésiennes de son orthocentre H.

3 - On note $t = \frac{\theta}{2}$ (justifier cette définition). Quelles valeurs prend t quand M décrit $\mathscr{C} \setminus \{A, B\}$? Exprimer les coordonnées cartésiennes de H en fonction de t.
On les notera désormais $x(t)$ et $y(t)$, et le point H sera noté $H(t)$. On notera $\mathscr{S} = \{H(t)\,;\ t \in \mathbb{R}\}$; cette courbe est appelée *strophoïde droite*.

4 - Montrer que la courbe $\mathscr{S}$ possède un axe de symétrie. Etudier les variations et limites des fonctions x et y sur un intervalle approprié.

5 - Représenter, sur une même figure, le cercle $\mathscr{C}$ et la courbe $\mathscr{S}$ ($a = 3cm$). On précisera les asymptotes éventuelles, et la position de $\mathscr{S}$ par rapport à ces asymptotes ; on montrera aussi que $\mathscr{S}$ possède un point double, et on déterminera les deux tangentes à $\mathscr{S}$ en ce point.

Problème 16 **

Des courbes définies par équation polaires

[Courbes en polaires, fonctions trigonométriques]

Les deux exercices proposés sont totalement indépendants.

A

Problème : représenter la courbe Γ d'équation polaire $\rho(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{1-\tan\theta}$ (dans un repère orthonormal).

1 - Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction ρ, et montrer qu'on obtient toute la courbe Γ en la représentant seulement pour $\theta \in D \cap [-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$.

2 - Montrer que la courbe Γ possède un centre de symétrie.

4 - Etudier, sur un intervalle convenable, les variations et limites de la fonction ρ. Préciser les tangentes à Γ en l'origine du repère.

5 - Montrer que Γ possède des asymptotes que l'on précisera (on sera sans doute amené à faire un changement de repère). Si possible, préciser la position de Γ par rapport à ces asymptotes.

6 - Représenter la courbe Γ (unité : 3 cm).

B

On se place dans le plan euclidien, muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. On se propose d'étudier la courbe Γ d'équation polaire $\rho = r(\theta)$, avec :

$$r(\theta) = \frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta}{1 - \sin\theta}.$$

1 - Préciser l'ensemble de définition D de la fonction r. On décide de faire varier θ dans l'ensemble $A = D \cap [0, 2\pi]$. Montrer que cela suffit à obtenir tous les points de la courbe Γ.

2 - Déterminer les points d'annulation de la fonction r sur l'ensemble A, puis étudier son signe sur A. On pourra pour cela chercher à factoriser le numérateur de l'expression de $r(\theta)$.

3 - Déterminer un vecteur directeur de chaque tangente à la courbe Γ au point O.

4 - Démontrer qu'au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ la courbe Γ admet pour asymptote la droite d'équation cartésienne $x = 4$ dans le repère $\mathscr{R}$.

5 - Démontrer que la courbe possède un point multiple autre que le point O. On le notera I. Déterminer ses coordonnées cartésiennes, et un vecteur directeur de chacune des tangentes à la courbe Γ au point I.

6 - Etudier le signe sur A de la fonction $\theta \mapsto r(\theta) + r(\theta + \pi)$. Quel intérêt présente cette étude pour le tracé de la courbe Γ ?

7 - A l'aide des informations précédentes, et de quelques valeurs déterminées à la calculatrice, effectuer un tracé aussi précis que possible de la courbe Γ (on choisira une échelle adaptée).

Problème 17 ***

Minimum d'une somme de distances

[Nombres complexes, inégalité triangulaire]

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Dans le plan complexe, soient $A_1, \dots, A_n$ n points d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$ supposées toutes non nulles. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_p = \frac{z_p}{|z_p|}$. On suppose :

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \qquad (\star).$$

1 - Soit M un point quelconque du plan complexe, et $z \in \mathbb{C}$ son abscisse.

a) On pose $S(z) = \bar{a}_1(z - z_1) + \bar{a}_n(z - z_n) + \dots + \bar{a}_n(z - z_n)$.
Montrer que $S(z)$ est un nombre réel strictement négatif, et que sa valeur est indépendante du choix du nombre complexe z.

b) En déduire que :

$$|z - z_1| + \dots + |z - z_n| \geqslant |z_1| + \dots + |z_n| \qquad (\star\star).$$

2 - On note E l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie :

$$|z - z_1| + \dots + |z - z_n| = |z_1| + \dots + |z_n| \qquad (\star\star\star).$$

a) Démontrer qu'un point M du plan complexe, d'affixe z, appartient à l'ensemble E si, et seulement si, les nombres complexes $\bar{a}_k(z - z_k)$ (pour $k \in [\![1, n]\!]$) sont tous des réels négatifs ou nuls.
[On pourra rappeler, sans démonstration, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité triangulaire, et établir une généralisation pour n nombres complexes.] **A améliorer !**

b) Interpréter géométriquement : la définition des nombres complexes a_k ; les relations $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$.

c) Déterminer l'ensemble E, en discutant selon que les points $(A_k)_{k \in [\![1,n]\!]}$ sont alignés ou non. Préciser le cas $n = 2$.

3 - Dans cette question, on choisit, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $z_k = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$, et $z = 1$.

a) Ecrire, en justifiant son emploi, l'inégalité $(\star\star)$, et indiquer dans quel cas on a l'égalité $(\star\star\star)$.

b) En déduire les encadrements :

$$\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} \leqslant n \quad (a) \qquad ; \qquad \frac{1}{n} \leqslant \tan\frac{\pi}{2n} \leqslant \frac{2}{n} \quad (b).$$

Problème 18 ***

Parabole, triangle et droite de Steiner

[Géométrie plane, coniques]

Dans ce problème, on n'hésitera pas à faire des figures nombreuses, au brouillon et/ou au propre. Il est fortement conseillé de lire entièrement l'énoncé avant de commencer à chercher.

Soient A, B, C trois points non alignés du plan. On note A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$; G le centre de gravité, et H l'orthocentre du triangle ABC. On note enfin $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, et O son centre.

On rappelle le résultat suivant, démontré en exercice : le point O est l'image du point H par l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1 - Symétriques de l'orthocentre

a) En remarquant que $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{A'O}$, montrer que le symétrique I du point H par rapport au point A' appartient au cercle $\mathscr{C}$.

b) Montrer qu'il en est de même pour le symétrique J du point H par rapport à la droite (BC).

2 - Droite de Simson

Soit M un point quelconque du plan. On note P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les droites $(BC), (CA), (AB)$.

a) On suppose ici que M n'appartient à aucune des droites $(BC), (CA), (AB)$. Après avoir vérifié que les points M, P, Q, R sont distincts, montrer que $\widehat{QPR} \equiv \widehat{ACM} + \widehat{MBA}\ [\pi]$. En déduire que les points P, Q, R sont alignés si, et seulement si, le point M appartient au cercle $\mathscr{C}$ (privé de A, B, C).

b) On suppose maintenant que le point M appartient à l'une des droites $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les points P, Q, R sont alignés si, et seulement si, $M \in \{A, B, C\}$.

Si M appartient au cercle $\mathscr{C}$, l'unique droite contenant les points P, Q, R est appelée droite de Simson de M relativement au triangle ABC, et notée d_M.

c) Reconnaître les droites de Simson d_A, d_B, d_C des points A, B, C relativement au triangle ABC.

3 - Droite de Steiner

On appelle droite de Steiner du point M relativement au triangle ABC la droite Δ_M image de d_M dans l'homothétie de centre M et de rapport 2. On note P', Q', R' les images des points P, Q, R dans cette même homothétie.

a) Si $M \in \{A, B, C, J\}$, montrer que la droite de Steiner Δ_M contient l'orthocentre H du triangle ABC.

b) On suppose maintenant que $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B, C, J\}$. On note N le deuxième point d'intersection de la droite (MP) avec le cercle $\mathscr{C}$. Si (MP) est tangente à $\mathscr{C}$, on pose $N = M$.

Dans ces deux cas, montrer que $(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{PM}}) \equiv \widehat{QPM}\ [\pi]$. En déduire que les droites (AN) et d_M sont parallèles.

c) Toujours avec $M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B, C, J\}$, montrer que $\widehat{HP'M} \equiv \widehat{NAJ}\ [\pi]$. En déduire que la droite de Steiner Δ_M contient l'orthocentre H.

4 - Parabole et triangle

Soit $\mathscr{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$, et α, β, γ trois points distincts de $\mathscr{P}$.

a) Montrer que les tangentes à la paraboles $\mathscr{P}$ aux points α, β, γ sont deux à deux sécantes ; on note A, B, C leurs points d'intersection.

b) Faire une grande figure, où apparaîtrons le foyer F, la directrice $\mathscr{D}$, les points α, β, γ et les tangentes à $\mathscr{P}$ en ces points, les points A, B, C, leur cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC... et pourquoi pas une ébauche de la parabole $\mathscr{P}$.

c) Montrer que les points A, B, C, F sont cocycliques, et que la directrice $\mathscr{D}$ est la droite de Steiner du point F relativement au triangle ABC. En déduire que l'orthocentre du triangle ABC appartient à la directrice de la parabole $\mathscr{P}$.

d) Comment interpréter la droite de Simson du point F relativement au triangle ABC ?

Problème 19 **

Caractérisation des tangentes à une conique

[Géométrie plane, coniques, résolution d'équations]

Dans cet exercice, on fera apparaître clairement les disjonctions de cas qui seront nécessaires.

Soit α et β deux réels strictement positifs fixés. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1 - On considère l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, et soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $ax + by = c$. Déterminer, selon les valeurs de a, b et c, le nombre de points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec l'ellipse $\mathscr{E}$.

Indication : on sera amené à faire intervenir le réel $\delta = (\alpha a)^2 + (\beta b)^2 - c^2$.

b) On admet que la droite $\mathscr{D}$ est tangente à l'ellipse $\mathscr{E}$ si, et seulement si, elles se rencontrent en un point unique. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel δ pour que $\mathscr{D}$ soit tangente à $\mathscr{E}$.

2 - On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation cartésienne $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, et soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $ax + by = c$. Déterminer, selon les valeurs de a, b et c, le nombre de points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec l'hyperbole $\mathscr{H}$.

b) Faire un dessin. Démontrer qu'il existe au moins une droite qui rencontre $\mathscr{H}$ en un point unique, mais qui n'est pas tangente à $\mathscr{H}$.

c) Quelles sont les droites qui, sans lui être tangentes, rencontrent $\mathscr{H}$ en un seul point ?
(On ne demande pas de démonstration.)

b) A partir des résultats des questions **a)** et **c)**, donner une condition nécessaire et suffisante sur α, β, a, b, c pour que la droite $\mathscr{D}$ soit tangente à l'hyperbole $\mathscr{H}$.

Problème 20 ✻

Suites récurrentes doubles

[Suites numériques, nombres complexes, algèbre linéaire]

A noter : les résultats et méthodes obtenus dans ce problème seront désormais considérés comme partie intégrante du cours.

On fixe deux nombres complexes a et b.

L'objectif est de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (\star)$$

1 - a) Montrer que $\mathscr{E}$ est non vide.
b) Montrer que, si u et v sont deux suites appartenant à $\mathscr{E}$, et λ un nombre complexe quelconque, alors les suites $u+v$ et λu appartiennent à $\mathscr{E}$.
c) Montrer que l'application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathbb{C}^2,\ u \mapsto (u_0, u_1)$ est injective.

On admet que φ est aussi surjective. On a ainsi prouvé que l'ensemble $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

2 - Soit r un élément de $\mathbb{C}$, et u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = r^n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$ si, et seulement si, r est une solution de l'équation caractéristique :

$$X^2 - aX - b = 0 \quad (EC)$$

On notera Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

3 - On suppose ici $\Delta \neq 0$, et on note r_1 et r_2 les deux racines complexes de l'équation (EC).
a) Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathbb{C}^2$, la suite v, définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = Ar_1^n + Br_2^n$, appartient à $\mathscr{E}$.
b) Soit maintenant u une suite complexe quelconque élément de $\mathscr{E}$. Montrer que le système :

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ r_1 A + r_2 B = u_1 \end{cases} \qquad (CI)$$

admet un unique couple solution $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.
c) Soit (A, B) le couple solution du système (CI). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

(On pourra se reporter à la question **1 - c)** .)

Proposition : *Si $\Delta \neq 0$, soient r_1 et r_2 les deux racines de (EC). Alors, pour toute suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:*

$$u \in \mathscr{E} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (A, B) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

4 - On suppose ici $\Delta = 0$, et on note r l'unique racine complexe de l'équation (EC).
a) Montrer que la suite $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$.
b) Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathbb{C}^2$, la suite v, définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = (An+B)r^n$, appartient à $\mathscr{E}$.
c) Soit maintenant u une suite complexe quelconque élément de $\mathscr{E}$. Montrer que, si $r \neq 0$, il existe un unique couple $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (An+B)r^n.$$

(On déterminera A et B en fonction de u_0 et u_1.)
Et si $r = 0$?
Proposition : *Si $\Delta = 0$, soit r l'unique racine de (EC). Si $r \neq 0$ alors, pour toute suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:*

$$u \in \mathscr{E} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (A,B) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (An+B)r^n.$$

5 - Soit v la suite complexe définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0\,; \quad v_1 = 1\,; \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} - v_n. \end{cases}$$

a) Calculer le terme général v_n de la suite v en fonction de n. Vérifier que la suite v est à valeurs réelles.
b) En déduire que la suite v est périodique, c'est-à-dire qu'il existe $T \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+T} = u_n.$$

6 - Soit f la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} f_0 = 0\,; \quad f_1 = 1\,; \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n. \end{cases}$$

a) Résoudre l'équation $X^2 - X - 1 = 0$. On note φ sa racine positive ; c'est le fameux «nombre d'or».
b) Calculer le terme général f_n de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.
c) Montrer que $\frac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$.
7 - Soit $w \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\ w_{n+2} = -w_n - 2w_{n+1}$.
a) Calculer le terme général v_n de la suite v en fonction de n.
b) Montrer que w est convergente si, et seulement si, w est la suite nulle.

Problème 21 **

Limite supérieure, limite inférieure

[Suites numériques, borne supérieure dans $\mathbb{R}$]

Dans tout le problème, on fixe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on suppose *bornée*.

A - Définition

1 - a) Soit n un entier naturel. On pose $X_n = \{u_p\,;\ p \geqslant n\}$. Montrer que X_n admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \sup X_n$ et $i_n = \inf X_n$. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Montrer que les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On notera :

$$L_s = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad ; \qquad L_i = \lim_{n\to+\infty} i_n.$$

2 - Déterminer les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants (les résultats devront être justifiés) :

a) La suite u est constante nulle.

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

B - Lien avec la convergence

3 - a) On suppose (pour cette question seulement) $L_s = L_i$. Montrer que la suite u est convergente.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que :

$$L_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \leqslant L_s.$$

4 - On suppose ici la suite u convergente, de limite ℓ. Montrer que $L_s = L_i = \ell$.

5 - Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit convergente et de limite L_s.
On prouverait de même le résultat homologue pour L_i.

Problème 22 ✻

Des développements asymptotiques

[Suites numériques, développements limités, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$]

Les deux exercices proposés sont totalement indépendants.

A - Développement asymptotique d'une suite

Soit u la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}$.
On cherche un développement asymptotique d'ordre 4 de la suite u au voisinage de $+\infty$, sous la forme :

$$u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{d}{n^3} + \frac{e}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

1 - Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
[On pourra commencer par montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant 2$.]

2 - Soit v la suite réelle définie pour tout entier $n \geqslant 6$ par : $v_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-5} k! = \frac{1!+2!+\ldots+(n-5)!}{n!}$.
Montrer que, quand n tend vers $+\infty$, $v_n = o(\frac{1}{n^4})$.

3 - Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 4 quand n tend vers $+\infty$ de :
a) $n \mapsto \frac{1}{n(n-1)}$ **b)** $n \mapsto \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ **c)** $n \mapsto \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$.

4 - Montrer que u admet un développement asymptotique (que l'on déterminera) sous la forme souhaitée.

B - Etude d'une suite définie implicitement

L'objectif du problème est d'étudier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(E_p) \quad x + \ln x = p.$$

1 - Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que l'équation (E_p) possède une unique solution, qu'on notera x_p. Montrer que $x_p \in [1, p]$.

2 - Montrer que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, et que $x_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$.

3 - Montrer que $x_p \sim p$ lorsque $p \to +\infty$.

4 - Montrer que $\frac{x_{p+1}}{x_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$, et en déduire la limite lorsque $p \to +\infty$ de $x_{p+1} - x_p$.

5 - Montrer que, lorsque $p \to +\infty$, $x_p = p - \ln p + o(1)$.
[On remarquera que $x_p - p = -\ln x_p$.]

6 - Montrer que, lorsque $p \to +\infty$, $x_p = p - \ln p + \frac{\ln p}{p} + o(\frac{1}{p})$.

7 - Pouvez-vous pousser le développement plus loin ?

Problème 23 *

Série harmonique et séries alternées

[Suites numériques]

A - La série harmonique

1 - a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n} \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad \frac{1}{n} \leqslant \ln n - \ln(n-1).$$

2 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.$$

b) En déduire la nature (convergente ou divergente) de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$.

3 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente. On note γ sa limite. Il existe donc une suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \ln n + \gamma + v_n.$$

B - Une série alternée

4 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
a) Montrer que les suites extraites $(S_{2p})_{p \geqslant 1}$ et $(S_{2p+1})_{p \geqslant 1}$ sont adjacentes.
b) En déduire la nature de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.

5 - On se propose maintenant de calculer la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.
a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_{2n} = H_{2n} - H_n$.
b) A l'aide du résultat final de la question 3, déterminer la limite ℓ.

6 - En discutant selon la parité de l'entier $n \geqslant 1$, établir la majoration :

$$|S_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

C - Une série un peu plus élaborée

7 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos \frac{k2\pi}{3}$.
a) Déterminer trois réels a, b, c tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_{3n} = a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k} + b \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k-1} + c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k-2}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{3n} = \frac{1}{2} H_n - \frac{1}{2} H_{3n}$.

8 - a) Montrer que la suite $(T_{3n})_{n \geqslant 1}$ est convergente, et préciser sa limite.
b) Déterminer la nature de la suite $(T_n)_{n \geqslant 1}$, et préciser sa limite éventuelle.

Problème 24 **

Suites réelles sur-additives et multiplicatives

[Suites numériques]

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant les propriétés :

(i) $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{n+m} \geqslant u_n + u_m$

(ii) $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad u_{nm} = u_n u_m$

Partie I

1 - a) Montrer que $u_0 = 0$ et $u_1 \in \{0, 1\}$.
b) Que peut-on dire de la suite u si $u_1 = 0$?

On suppose désormais que $u_1 = 1$.

2 - a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$.
b) Montrer que u est une suite strictement croissante.

3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n^k} en fonction de u_n et de k.

4 - Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé.
a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique entier naturel q_k tel que $2^{q_k} \leqslant n^k < 2^{q_k+1}$.
b) Montrer que la suite $\left(\frac{q_k}{k}\right)$ admet une limite que l'on précisera.
c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_2^{q_k} \leqslant u_n^k \leqslant u_2^{q_k+1}$
d) Montrer que les réels $\ln u_2$ et $\ln u_n$ sont bien définis et strictement positifs, puis déduire de la question précédente un encadrement du réel $\frac{\ln u_n}{\ln u_2}$.
e) A l'aide de la question b, en déduire que $\frac{\ln u_n}{\ln u_2} = \frac{\ln n}{\ln 2}$.

5 - Conclure à l'existence d'un unique réel $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^\alpha$.

Partie II

Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

1 - Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + x^\alpha$ On pourra, pour cela, dresser le tableau de variation d'une fonction bien choisie.

2 - En déduire que la suite $v = (n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions *(i)* et *(ii)*.

Problème 25 **

Produit de convolution de deux suites

[Suites numériques]

Définition : si u et v sont deux suites de nombres complexes, on appelle *produit de convolution* de u et v la suite $u \star v = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

1 - Premiers exemples

Soient a et b des complexes fixés. Dans chacun des cas suivants, déterminer le produit de convolution w des suites u et v, en écrivant le terme w_n sous une forme aussi simple que possible :

a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a$ et $v_n = b$;

b) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^n$ et $v_n = b^n$;

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{a^n}{n!}$ et $v_n = \frac{b^n}{n!}$.

2 - Exemples d'étude de la convergence de la suite w

a) On suppose que u et v sont deux suites bornées. Le produit de convolution $u \star v$ est-il nécessairement borné ?

b) On suppose que u et v sont deux suites convergentes. Le produit de convolution $u \star v$ est-il nécessairement convergent ?

c) On suppose, pour cette question seulement, que $u = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, et que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution.

(i) Montrer que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$, on a $\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

(ii) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_{2n} \leqslant v_0 u_{2n} + v_1 u_n + 2v_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0 u_{2n+1} + v_1 u_n + 2v_{n+1}.$$

(iii) En déduire que le produit de convolution w converge, et préciser sa limite.

d) On suppose, pour cette question, que $u = \left((-\frac{1}{2})^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, et que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution. Montrer, à l'aide de la question précédente, que la suite w converge, et préciser sa limite.

3 - Application à l'étude d'un ensemble de suites réelles

On note T l'ensemble des suites $t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ t_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad t_{n+2} \leqslant \frac{t_n + t_{n+1}}{2}.$$

a) Démontrer que T contient toutes les suites décroisantes de réels positifs.

b) Démontrer que T ne contient aucune suite strictement croissante.

c) Soit z une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \ z_{n+2} = \frac{z_n + z_{n+1}}{2}$. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :$\forall n \in \mathbb{N} \ z_n = \alpha + \beta(-\frac{1}{2})^n$.

En déduire qu'il existe des suites non monotones appartenant à T.

d) On fixe désormais une suite $t \in T$. On définit la suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en posant :

$$v_0 = t_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \ v_n = t_n + \frac{t_{n-1}}{2}.$$

Démontrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et admet une limite réelle ℓ (qu'on n'essaiera pas de calculer).

e) Soit $u = \left((-\frac{1}{2})^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Démontrer que $u \star v = t$.

f) Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n = v_n - \ell$. Démontrer que la suite $u \star x$ est de limite nulle.

En déduire que la suite t converge, et préciser sa limite.

Problème 26 ✻

Une équation fonctionnelle avec hypothèse de continuité

[Continuité des fonctions, suites numériques]

1 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose :

(i) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$;

(ii) f est continue en 0.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer de deux façons différentes que la suite $\left(f(\frac{x}{2^n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
b) En déduire que la fonction f est constante.

On considère maintenant l'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x) \cos x \quad (C).$$

2 - Soit $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$.
a) Montrer que la fonction φ admet un prolongement par continuité en 0. On notera ψ la fonction ainsi prolongée.
b) Montrer que $\psi \in \mathscr{E}$.

3 - Soit maintenant $f \in \mathscr{E}$ quelconque.
a) Pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{\psi(x)}$. Montrer que g est une fonction constante.
b) En déduire qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda\psi(x).$$

Problème 27 ***

Oscillation en un point d'une fonction bornée

[Borne supérieure dans $\mathbb{R}$, limites de fonctions]

Dans tout ce problème, on fixe un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et a un point de I.

Pour tout réel $r > 0$, on note $I_r = I \cap [a-r, a+r]$, et $\omega_a(r) = \sup\{|f(x) - f(y)|\ ;\ (x,y) \in (I_r)^2\}$.

1 - a) Démontrer que la borne supérieure $\omega_a(r)$ existe dans $\mathbb{R}$.
b) Démontrer que la fonction $omega_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est croissante.
c) En déduire que cette fonction admet une limite en 0.

Cette limite sera notée Ω_a et appelée l'oscillation de la fonction f au point a.

2 - On pose $I = [-1, 1]$ et $a = 0$. Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle I, et déterminer l'oscillation de f au point a (on présentera un raisonnement complet et précis) :
a) $\forall x \in I \quad f(x) = 0$;
b) $\forall x \in I \quad f(x) = 2x + 3$;
c) $f(0) = 0, \quad \forall x \in [-1, 0[\quad f(x) = -1, \quad \forall x \in]0, 1] \quad f(x) = 1$;
d) $f(0) = 0, \quad \forall x \in I \setminus \{0\} \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

3 - (question optionnelle)
a) On suppose $\Omega_a = 0$. Montrer que la fonction f est continue au point a.
b) On suppose f continue au point a. Montrer que $\Omega_a = 0$.
c) On suppose que f admet une limite à gauche $f_g(a)$ et une limite à droite $f_d(a)$ au point a. Déterminer l'oscillation de f au point a en fonction de $f_g(a)$, $f_d(a)$ et $f(a)$.

Problème 28 *

Méthode de Newton

[Suites numériques, dérivation, comparaison des suites]

Soient deux réels $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathbb{C}^2$, et Γ sa courbe représentative. On suppose :

(i) $f(a) < 0 < f(b)$;

(ii) $\forall x \in [a, b]\ f'(x) > 0$;

(iii) $\forall x \in [a, b]\ f''(x) > 0$.

1 - a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution ω dans l'intervalle $]a, b[$.
b) On pose $m_1 = \inf_{[a,b]} f'$ et $M_2 = \sup_{[a,b]} f''$. Après avoir justifié (rapidement) leur existence, montrer que les réels m_1 et M_2 sont strictement positifs.

2 - On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à Γ au point d'abscisse x_n.
a) Représenter sur un dessin (de taille respectable) la construction de x_0, x_1, x_2, x_3.
b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et à valeurs dans $]\omega, b]$. On pourra faire intervenir une application $\varphi :]\omega, b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = \varphi(x_n)$.
c) Etudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et démontrer qu'elle converge vers ω

3 - a) Exprimer $x_{n+1} - \omega$ en fonction de $x_n - \omega$, et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < x_{n+1} - \omega \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(x_n - \omega)^2.$$

b) Montrer l'existence d'un entier N tel que $\frac{M_2}{2m_1}(x_N - \omega)^2 < 1$. En déduire qu'il existe deux constantes $c > 0$ et $k \in]0, 1[$ telles que, pour *n assez grand*,

$$0 < x_n - \omega \leqslant c \cdot k^{2^n}.$$

c) Montrer en particulier que la suite $(x_n - \omega)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant n'importe quelle suite géométrique (ce qui donne une idée de la rapidité de convergence).

4 - Supposons avoir obtenu $c = 1$, $k = \frac{1}{2}$. Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de ω à 10^{-10} près ? à 10^{-100} près ? à 10^{-1000} près ?
On pourra comparer, par exemple, avec une suite géométrique de raison 10^{-10}...

Problème 29 **

Approximation de la constante d'Euler

[Suites numériques, théorème des accroissements finis]

Ce problème a pour objet une étude de la constante d'Euler notée γ.
Le théorème des accroissements finis intervient à plusieurs reprises. Vous devrez préciser chaque fois clairement pour quelle fonction et entre quelles bornes vous l'utilisez.
Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln n$.

Partie I

1 - a) Prouver pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement : $\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}$.
b) A l'aide d'un encadrement de $u_{n+1} - u_n$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq u_n \leq 1$.
c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note γ sa limite (*constante d'Euler*).

2 - a) Étudier, sur l'intervalle $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$), le signe de la fonction f_k définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{k} + (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k})(x-k) - \frac{1}{x}$$

b) En considérant une fonction F_k telle que $F_k' = f_k$, en déduire l'encadrement

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}).$$

c) Prouver que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

3 - Déterminer un équivalent pour la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II

4 - a) Après avoir étudié leurs variations, étudier le signe des fonctions g_1 et g_2 définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{1}{x+1} + \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{2x^2} \\ g_2(x) &= g_1(x) + \frac{2}{3x^3} \end{aligned}$$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}.$$

5 - Dans cette question $n \geq 2$ et $p \geq n$.
a) En utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \to \frac{1}{x}$ entre k et $k+1$ (k entier), former un encadrement de $\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2}$.
b) Former par une méthode analogue à celle de la question précédente un encadrement de $\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^3}$.
c) En déduire

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

6 - Donner une valeur de l'entier n telle que l'encadrement précédent permette, à partir de u_n, de déterminer γ à moins de 10^{-2} près.

Problème 30 ***

Fonctions absolument monotones

[Dérivation, récurrence]

D'après un sujet du concours Centrale-Supélec, 1998.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, contenant au moins deux points, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est absolument monotone si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in I\ f^{(k)}(x) \geqslant 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est monotone jusqu'à l'ordre n si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\ \forall x \in I\ f^{(k)}(x) \geqslant 0.$$

Ainsi, f est absolument monotone si, et seulement si, f est monotone à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.
On pourra noter AM pour «absolument monotone» et M_n pour «monotone jusqu'à l'ordre n».

Partie I

1 - Dans chacun des cas suivants, préciser si la fonction f est absolument monotone :
a) $I = \mathbb{R}$ et $f = \exp$.
b) $I = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = |x|$.
c) $I =]-\infty, 0[$ et $\forall x \in I\ f(x) = -\frac{1}{x}$.
d) $I =]-\infty, 0[$ et $\forall x \in I\ f(x) = -\ln(-x)$.

2 - On suppose ici que $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions absolument monotones.
a) Montrer que la fonction $f + g$ est absolument monotone.
b) Montrer que la fonction fg est absolument monotone.
c) Montrer que la fonction $\exp \circ f$ est absolument monotone.
Indication : pour cette dernière question, on montrera, par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, que f est monotone jusqu'à l'ordre n.

3 - *moins facile* Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est absolument monotone :
a) $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \tan x$.
b) $I =]0, 1[$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
c) $I =]0, 1[$ et $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = \arcsin x$.

4 - On suppose ici $I =]a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $a < b$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction absolument monotone.
a) Montrer que la fonction f admet au point a une limite $\ell \in \mathbb{R}^+$.
b) On prolonge la fonction f en une fonction $\tilde{f} : [a, b[\to \mathbb{R}$ en posant $\tilde{f}(a) = \ell$. Montrer que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable au point a, et que la fonction dérivée $\tilde{f}'$ est continue au point a.
c) Plus généralement, démontrer que la fonction $\tilde{f}$ admet, à tous les ordres, des dérivées positives ou nulles au point a.
d) Le même phénomène se produit-il au point b, si $b \in \mathbb{R}$?

Partie II

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et t un réel strictement positif.
On définit l'application $\Delta_t f$ en posant, pour tout réel x *convenable* : $\Delta_t f(x) = f(x + t) - f(x)$.

Plus généralement, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\Delta_t^n f$ en posant $\Delta_t^0 f = f$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_t^{n+1} f = \Delta_t[\Delta_t^n f]$.

5 - Soient a et b des réels avec $a < b$. On suppose $I =]a, b[$. Quel est l'ensemble de définition de $\Delta_t f$ et, plus généralement, l'ensemble de définition de $\Delta_t^n f$ pour $n \in \mathbb{N}$?

On suppose désormais $I = \mathbb{R}$.

6 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel x,

$$\Delta_t^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x + kt).$$

On procèdera par récurrence, en exprimant très clairement l'hypothèse de récurrence.

7 - On pose ici $f = \exp$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_t^n f(x)$.

8 - *plus difficile* On suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument monotone.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_t^n f(x) \geqslant 0$.
Indication : en fixant n et x, on pourra définir $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \Delta_t^{n+1} f(x)$, et exprimer $\varphi'(t)$ à l'aide de $\Delta_t^n[f']$.

Avis aux amateurs : la fin du problème consistait à démontrer la réciproque...

Problème 31 **

Deux inégalités de convexité

[Dérivation, fonctions convexes]

Les deux exercices proposés sont totalement indépendants.

A

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et telles que : $\forall x \in [0,1]\ f''(x) \leqslant 1$.

1 - Déterminer la partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ constituée des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et telles que : $\forall x \in [0,1]\ f''(x) = 1$.
Si $f \in \mathscr{F}$, déterminer f en fonction de $f(0)$ et $f(1)$.

2 - Soit $f \in \mathscr{E}$ fixé. On lui associe la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [0,1]\ g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} - (f(1) - f(0) - \frac{1}{2})x - f(0)$.
a) *Démontrer* que la fonction g est concave sur $[0,1]$.
b) En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{E}$, on a : $f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1) \leqslant \frac{1}{4}$.

3 - Avec les notations de la question précédente, on suppose maintenant : $f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1) = \frac{1}{4}$.
Démontrer que $f \in \mathscr{F}$.

B - Inégalité de convexité de Hölder

Soient α, β deux réels strictement positifs fixés, tels que $\alpha + \beta = 1$.

1 - a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1 + e^x)$. Démontrer que f est convexe.
b) En déduire que, pour tout $(a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^*)^4$, on a :

$$a^\alpha b^\beta + c^\alpha d^\beta \leqslant (a+c)^\alpha (c+d)^\beta.$$

2 - On fixe ici un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.
a) Etablir l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}} \right)^\alpha \left(\sum_{i=1}^n y_i^{\frac{1}{\beta}} \right)^\beta .$$

(On pourra raisonner par récurrence sur n, et utiliser le résultat précédent.)
b) Ecrire l'inégalité de Hölder pour $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, et en donner une interprétation géométrique.

Problème 32 ✱✱

Intégrales de Wallis, formule de Stirling

[Intégration, **A compléter !***]*

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 s^n \sqrt{1-s^2}\, ds$.

1 - a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$.
[Indication : on a $s^n\sqrt{1-s^2} = s^{n-1} \cdot s\sqrt{1-s^2}$.]

b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{4^{p+1}p!(p+1)!} \quad ; \quad I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4^p p!(p+1)!}{(2p+3)!}.$$

Problème 33 ***

Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2 x + \tan x + 1}\, dx$.

[Intégration, polynômes]

1 - Déterminer les primitives de la fonction rationnelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\sqrt{3}x + 1}{\sqrt{3}x^2 - 2(1-\sqrt{2})x + \sqrt{3}(1-\sqrt{2})^2}.$$

2 - On considère le polynôme à coefficients réels $P = 3X^4 - 4\sqrt{3}X^3 + 14X^2 + 4\sqrt{3}X + 3$.
a) Déterminer deux polynômes $A \in \mathbb{R}_2[X]$ et $B \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
b) En déduire la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.
[Si l'on n'a pas su répondre à la question précédente, rien n'empêche d'employer une autre méthode pour répondre à celle-ci !]

3 - Effectuer la «décomposition en éléments simples» de la fonction rationnelle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{3(x^2+1)^2}{xP(x)}.$$

4 - On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2 x + \tan x + 1}\, dx$.
a) Démontrer que l'intégrale I est bien définie.
b) Effectuer dans l'intégrale I le changement de variable $x = \arctan t$.
c) Effectuer dans l'intégrale alors obtenue le changement de variable $t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh \varphi$.
d) Effectuer dans l'intégrale alors obtenue le changement de variable $\varphi = \ln u$.
[Pour chacun de ces changements de variable, on définira précisément la fonction de changement de variable, et on effectuera clairement toutes les vérifications nécessaires.]

A ce stade, on doit avoir obtenu $I = \int_{\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \frac{3(x^2+1)^2}{xP(x)} dx$.

5 - Calculer le réel I.
[On se contentera de l'expression immédiatement déduite des calculs précédents, sans chercher à la simplifier, ni à l'approximer.]

Problème 34
Révisions d'analyse

[Equations différentielles, développements limités, formules de Taylor...]

D'après un sujet du concours des Mines de première année, 2004.

1 - Première partie.
On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$. Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)\, y$.
a) Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}$.
b) Intégrer (E) sur I.

2 - Deuxième partie.
Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.
a) Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.
b) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}}$ pour tout réel x appartenant à I.
La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.
c) Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
d) En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

3 - Troisième partie.
Le but de cette partie et de la suivante est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.
a) Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
b) Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3. En déduire a_4.
c) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.

3 - Quatrième partie.
On désigne par (u_p) la suite définie pour tout entier naturel p par : $u_p = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$.
Etant donnés p et n des entiers naturels quelconques, on pose : $S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$.
a) En appliquant une formule de Taylor à la fonction exponentielle, prouver que la suite (u_p) converge vers e.
b) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.
Prouver que les suites $p \to S_p(0)$ et $p \to S_p(1)$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.
c) Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2)\, S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

d) En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $p \to S_p(n)$ converge, et que sa limite est a_n.

Problème 35 **

Fonctions caractéristiques de parties

[Théorie des ensembles]

Soit E un ensemble. Pour une partie quelconque A de E, on définit la fonction caractéristique de A, $\varphi_A : E \to \{0,1\}$, en posant, pour tout $x \in E$:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

1 - Soient A et B deux parties de E. On note $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leurs complémentaires dans E.
a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\varphi_{\bar{A}}(x) = 1 - \varphi_A(x)$ et $\varphi_{A\cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.
b) En déduire des expressions, à l'aide des fonctions caractéristiques φ_A et φ_B, des fonctions caractéristiques $\varphi_{A\cup B}$, $\varphi_{A\setminus B}$ et $\varphi_{A\Delta B}$.

2 - a) Soient A et B deux parties de E. Montrer que : $\varphi_A = \varphi_B \quad \Leftrightarrow \quad A = B$.
b) On note $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \mapsto & \varphi_A \end{array}$. Montrer que l'application Φ est bijective.
On veillera à bien comprendre ce que signifient les affirmations «Φ est injective» et surtout «Φ est surjective».

3 - Soit F un deuxième ensemble, $f : E \to F$ une application, et B une partie de F. On note $\psi_B : F \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de la partie B. Montrer que la fonction caractéristique de l'image réciproque de B par f est :

$$\varphi_{f^{-1}(B)} = \psi_B \circ f.$$

De même, on veillera à bien comprendre ce que signifie l'égalité de deux fonctions.

Problème 36 ✻

Borne supérieure dans $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$

[Théorie des ensembles, relations d'ordre]

On rappelle que, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de partie de $\mathbb{N}$, on note $\bigcup_{i\in I} A_i$ sa réunion, et $\bigcap_{i\in I} A_i$ son intersection.

On note $E = \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties **finies** de $\mathbb{N}$.

1 - a) Montrer que la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre sur E.
(On rappelle qu'une relation d'ordre est une relation réflexive, transitive et antisymétrique.)

b) La relation d'ordre $\subset$ est-elle totale (on justifiera la réponse) ?

2 - On note $A_1 = \{0; 4\}$, $A_2 = \{4; 5\}$, $A_3 = \{0; 2; 4\}$ et $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$.

a) Soit X un élément de E. Ecrire, à l'aide de quantificateurs, la propriété «X est un minorant de la partie $\mathscr{A}$ pour l'ordre $\subset$» et sa négation.

b) Montrer que la partie $\mathscr{A}$ n'admet pas de plus petit élément.

c) Déterminer l'ensemble des minorants de la partie $\mathscr{A}$ dans E.

d) Démontrer que la partie $\mathscr{A}$ admet dans E, pour l'ordre $\subset$, une borne inférieure que l'on précisera.
Indication : on pourra remarquer que cette borne inférieure X est «la plus grande partie finie de $\mathbb{N}$ contenue dans A_1, A_2 et A_3».

e) Donner, sans démonstration, la borne supérieure de la partie $\mathscr{A}$ pour l'ordre $\subset$.

3 - a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n$ des parties finies de $\mathbb{N}$, et $\mathscr{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ une partie finie non vide de E. Démontrer que la partie $\mathscr{A}$ possède une borne supérieure que l'on précisera.

b) Soit I un ensemble quelconque, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties finies de $\mathbb{N}$, et $\mathscr{A} = \{A_i\ ;\ i \in I\}$ une partie quelconque de E. Démontrer que la partie $\mathscr{A}$ possède une borne inférieure que l'on précisera.

c) Montrer qu'il existe au moins une partie de E qui n'admet pas de borne supérieure dans E. L'ensemble ordonné $(E, \subset)$ vérifie-t-il l'«axiome de la borne supérieure» ?

Problème 37 ✻

Groupes à 2, 3, 4 éléments

[Groupes]

Soit G un ensemble fini. Si $\star$ est une loi de composition interne (LCI) sur l'ensemble G, on appellera table de la loi $\star$ le tableau $\mathbf{T}_\star$ci-dessous, où on lit dans la ligne x et la colonne y le «produit» $x \star y$ (dans cet ordre).

$\star$	e	$\dots$	y	$\dots$
e	$e \star e$		$e \star y$	
$\vdots$				
x	$x \star e$		$x \star y$	
$\vdots$				

$\mathbf{T}_\star$ (table de la loi $\star$)

On recherche les lois de composition interne $\star$ sur G telles que $(G, \star)$ est un groupe, c'est-à-dire :

(i) la loi $\star$ est associative,

(ii) la loi $\star$ admet un élément neutre dans G,

(iii) tout élément $g \in G$ possède un symétrique dans G (que l'on notera g^{-1}) pour la loi $\star$.

On suppose que $\star$ est une telle loi. On notera désormais e l'élément neutre de G pour la loi $\star$. On le fera toujours apparaître en première position dans la table $\mathbf{T}_\star$.

1 - a) Soit $x \in G$ fixé. Montrer que $f_x : G \to G,\ y \mapsto x \star y$ est bijective (on déterminera la bijection réciproque). Que peut-on en déduire sur les lignes de la table de la loi $\star$?

b) Soit $x \in G$ fixé. Montrer de même que $h_x : G \to G,\ y \mapsto y \star x$ est bijective. Que peut-on en déduire sur les colonnes de la table de la loi $\star$?

2 - a) On suppose ici que G est de cardinal 2. On note $G = \{e, a\}$. Démontrer que la table de la loi $\star$ est nécessairement la table ci-dessous :

$\star$	e	a
e	e	a
a	a	e

Table d'un groupe de cardinal 2

On expliquera clairement pourquoi il n'y a qu'une façon possible de remplir la table $\mathbf{T}_\star$.

b) On suppose ici que G est de cardinal 3. On note $G = \{e, a, b\}$.

(i) Montrer que $a \star a = b$ (on pourra raisonner par l'absurde en essayant de remplir la table $\mathbf{T}_\star$).

(ii) En déduire qu'il n'y a qu'une table possible pour la loi $\star$.

3 - On suppose ici que G est de cardinal 4. On va distinguer deux «familles» de loi de groupe sur G.

a) On suppose ici que, pour tout $x \in G$, $x \star x = e$. On note $G = \{e, a, b, c\}$. Montrer qu'il n'y a dans ce cas qu'une table $\mathbf{T}_\star$ possible.

b) On suppose ici qu'il existe $a \in G$ tel que $a \star a \neq e$. On pose $b = a \star a$.

(i) Montrer que $b \neq a$. On note alors c le quatrième élément de G.

(ii) Montrer qu'il n'y a qu'une façon possible de remplir la table de $\star$.

c) (subsidiaire) Combien existe-t-il de lois de composition interne sur G de cardinal 4 telles que $(G, \star)$ soit un groupe ?

Problème 38 **

Etude de deux groupes isomorphes

[Groupes, applications affines]

1 - Un produit semi-direct

Soit l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit G de la loi $\star$ définie par :

$$\forall (x,y) \in G \quad \forall (x',y') \in G \quad (x,y) \star (x',y') = (xx', y + xy')$$

a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne sur G, et qu'elle admet un élément neutre dans G, que l'on déterminera.
b) Montrer que $(G, \star)$ est un groupe. S'agit-il d'un groupe abélien ?
c) Soit $H = \mathbb{R}^* \times \{0\}$ et $K = \{1\} \times \mathbb{R}$, vus commes des parties de G. Montrer que H et K sont des sous-groupes de G.

2 - Les transformations affines de $\mathbb{R}$

On note $\S(\mathbb{R})$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $(\S(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe.
On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application affine si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y).$$

On note $Aff(\mathbb{R})$ l'ensemble des transformations affines de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $(Aff(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe. [On pourra montrer que c'est un sous-groupe de $(\S(\mathbb{R}), \circ)$.]

3 - Un isomorphisme

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_{a,b}(x) = ax + b$.
a) Montrer que $f_{a,b}$ est une application affine. A quelle condition est-elle bijective ?
b) Montrer que l'application $F : G \to Aff(\mathbb{R})$ définie par $F(a,b) = f_{a,b}$ est un morphisme de groupes.
c) Montrer enfin que F est un isomorphisme de groupes. En déduire que $Aff(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe abélien.

4 - Les automorphismes intérieurs de G

a) Soit $g \in G$, et $\varphi_g : G \to G$ définie par $\varphi_g(h) = g \star h \star g^{-1}$ (on note g^{-1} le symétrique de g pour $\star$). Montrer que φ_g est un endomorphisme du groupe G, puis qu'il est bijectif. (on donnera le morphisme inverse).
b) Montrer que le sous-groupe K est stable par φ_g, c'est-à-dire que $\varphi_g(K) \subset K$. Qu'en est-il de H ? On notera $\tilde{\varphi}_g$ l'endomorphisme de K induit par φ_g.
c) Montrer qu'en posant, pour $h \in H$, $\Phi(h) = \tilde{\varphi}_h$, on définit un morphisme de groupes de $(H, \star)$ dans le groupe $(Aut(K), \circ)$ des automorphismes (endomorphismes bijectifs) du groupe K.
Bonus : Φ est-il un isomorphisme ?

Problème 39 **

L'équation diophantienne $a^2 - 2b^2 = \pm 1$

[Anneaux, groupes]

A - Etude de l'anneau $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$

On note dans tout le problème $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\,;\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1 - Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2 - Montrer que A, muni de l'addition et de la multiplication des réels, est un anneau commutatif.

3 - a) Montrer que, pour tout $x \in A$, il existe un *unique* couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. On notera alors $\bar{x} = a - b\sqrt{2}$ et $N(x) = x\bar{x}$. On appelle $\bar{x}$ le conjugué de x dans A, et $N(x)$ la norme de x.
b) Montrer que, pour tout $x \in A$, on a $N(x) \in \mathbb{Z}$, et $N(x) = 0 \iff x = 0$.
c) Montrer que, pour tout $(x, x') \in A^2$, $N(xx') = N(x)N(x')$.

4 - a) Soit $x \in A$. Montrer que x est inversible dans A (c'est-à-dire possède, dans A, un symétrique pour la multiplication) si, et seulement si, $N(x) \in \{-1, 1\}$.
b) On note H l'ensemble des éléments inversibles de A. Montrer que $(H, \cdot)$ est un groupe.

B - Détermination de l'ensemble H

5 - Soit $x \in H$, et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$.
a) Montrer que si a et b sont de même signe, alors $|x| \geqslant 1$.
b) Montrer que si $ab \leqslant 0$, alors $|x| \leqslant 1$.

6 - On note $H^+ = H \cap]1, +\infty[$.
a) Montrer que le plus petit élément de H^+ est $\alpha = 1 + \sqrt{2}$.
b) Montrer que, pour tout $x \in H^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^n \leqslant x < \alpha^{n+1}$.
c) En déduire $H^+ = \{\alpha^n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

7 - Déterminer l'ensemble H.

Problème 40 ***

Dérangements d'un ensemble fini

[Théorie des ensembles, dénombrement]

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble fini de cardinal n. On appelle permutation de E toute application bijective de E dans lui-même, et on note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E. Si $\varphi \in S(E)$ est une permutation de E, et x un élément de E, on dit que x est un *point fixe* de φ si $\varphi(x) = x$.

Si, pour tout $x \in E$, $\varphi(x) \neq x$, c'est-à-dire si φ n'admet aucun point fixe, on dit que φ est un *dérangement* de E. On note $\mathscr{D}(E)$ l'ensemble des dérangements de E. Le cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}(E)$ ne dépend que de l'entier n : on le note d_n. On décide de poser $d_0 = 1$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathscr{D}_k(E)$ l'ensemble des permutations de E admettant exactement k points fixes. En particulier, on a $\mathscr{D}_0(E) = \mathscr{D}(E)$. On note $\delta_{n,k}$ le cardinal de $\mathscr{D}_k(E)$.

1 - Si A est une partie de E, on note :

$$\mathscr{D}_A(E) = \{\varphi : E \to E \mid \varphi \text{ induit l'identité sur } A \text{ et induit un dérangement de } E \setminus A\}.$$

a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathscr{D}_k(E) = \bigcup_{A \in \mathscr{P}_k(E)} \mathscr{D}_A(E).$$

b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\delta_{n,k} = \binom{n}{k} \delta_{n-k,0}$.

2 - On suppose ici $n \geqslant 2$. Soit x_0 un élément de E fixé, et $E' = E \setminus \{x_0\}$.
Si $\psi : E' \to E'$ est une permutation de E', et x_1 un élément de E', on définit l'application $\widetilde{\psi}_{x_1} : E \to E$ en posant, pour $x \in E$:

$$\widetilde{\psi}_{x_1}(x) = \begin{cases} \psi(x_1) & \text{si } x = x_0 \\ x_0 & \text{si } x = x_1 \\ \psi(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $\widetilde{\psi}_{x_1}$ est une permutation de E.
b) On suppose que ψ est un dérangement de E'. Montrer que $\widetilde{\psi}_{x_1}$ est un dérangement de E.
c) On suppose que ψ admet x_1 pour *unique* point fixe dans E'. Montrer que $\widetilde{\psi}_{x_1}$ est encore un dérangement de E.
d) En déduire que $\delta_{n,0} = n\delta_{n-1,0} + \delta_{n-1,1}$. On pourra remarquer que

$$\mathscr{D}_0(E) = \{\varphi \in \mathscr{D}_0(E) \mid \varphi(\varphi(x_0)) \neq x_0\} \cup \{\varphi \in \mathscr{D}_0(E) \mid \varphi(\varphi(x_0)) = x_0\}.$$

4 - L'entier n n'est désormais plus fixé. **a)** Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $d_n = n(d_{n-1} + d_{n-2})$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$d_n - nd_{n-1} = (-1)^n.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{d_n}{n!}$. Déterminer u_n en fonction de n, et en conclure que que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Problème 41 *

Le morphisme de décalage des suites

[Algèbre linéaire, suites numériques]

Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées.

1 - Montrer que $\mathscr{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (muni de sa structure habituelle de $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

2 - Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathscr{B}$, on note $T(u)$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ [T(u)]_n = u_{n+1}.$$

a) Montrer qu'on définit ainsi une application $T : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$, et que cette application est linéaire.
b) Déterminer le noyau de T. S'agit-il d'une application injective ?
c) Déterminer l'image de T. S'agit-il d'une application surjective ?

3 - Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une *valeur propre* de l'endomorphisme T s'il existe un élément $u \in \mathscr{B}$ tel que :

$$u \neq 0_{\mathscr{B}} \quad \text{et} \quad T(u) = \lambda u.$$

a) Montrer que λ est une valeur propre de T si, et seulement si, $\ker(T - \lambda \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}) \neq \{0_{\mathscr{B}}\}$.
b) On pose ici $\lambda = \frac{1}{2}$. Déterminer toutes les suites $u \in \mathscr{B}$ telles que $T(u) = \frac{1}{2}u$.
c) On pose ici $\lambda = 2$. Déterminer toutes les suites $u \in \mathscr{B}$ telles que $T(u) = 2u$.
d) On revient au cas général. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le nombre complexe λ pour que λ soit une valeur propre de l'endomorphisme T.

4 - Soit $S : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ une application linéaire telle que $T \circ S = \mathrm{Id}_{\mathscr{B}}$.
a) Montrer, par un exemple, qu'une telle application existe (on pourra se contenter de définir l'application S, sans prouver qu'elle est linéaire).
b) Montrer (dans le cas général) que l'endomorphisme $S \circ T$ est un projecteur de $\mathscr{B}$.
c) Montrer que $\ker(S \circ T) = \ker T$ et $\mathrm{im}\ (S \circ T) = \mathrm{im}\ S$.
d) Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de l'application S ?

Problème 42 **

Suites complexes périodiques

[Algèbre linéaire, suites numériques, arithmétique dans $\mathbb{Z}$]

Si $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite complexe, on dit que u est périodique si, et seulement si, il existe un entier naturel *non nul* p tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n$.
On dit alors que p est une période de la suite u. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des suites complexes périodiques.

On note $\mathscr{B}$ l'ensemble des suites complexes bornées. On rappelle que c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On fixe, pour tout le problème, w la suite constante de valeur 1 et $c = (\mathrm{Re}(i^{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$.

1 - Montrer que $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}$.

2 - Soit $u \in \mathscr{P}$, et T_u l'ensemble des périodes non nulles de la suite u.
a) Démontrer que l'ensemble T_u a un plus petit élément, que l'on notera p_0.
b) Démontrer que $T_u = \{kp_0\,;\ k \in \mathbb{N}^*\}$.
[Indication : on pourra utiliser la division euclidienne par p_0 dans $\mathbb{N}$.]
c) Déterminer les ensembles T_w et T_c.

3 - Soit $u \in \mathscr{P}$, p une période non nulle de u et $n \in \mathbb{N}$ quelconque. On pose :

$$A(u, p, n) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}.$$

a) La suite u étant fixée, démontrer que le complexe $A(u, p, n)$ ne dépend ni de l'entier n choisi, ni de la période p choisie.
Ce nombre complexe, dépendant uniquement de u, sera désormais noté $M(u)$.
b) Calculer $M(w)$ et $M(c)$.
c) Démontrer que l'application $M : \mathscr{P} \to \mathbb{C},\ u \mapsto M(u)$ est une application linéaire. Est-elle surjective ?
e) Démontrer que l'application $\pi : \mathscr{P} \to \mathscr{P},\ u \mapsto u - M(u)w$ est un projecteur de $\mathscr{P}$.
d) On note $\mathscr{P}_0 = \ker M$ et $\mathscr{P}_1 = \mathrm{Vect}(w) = \{\lambda w\,;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$. Démontrer que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont supplémentaires dans $\mathscr{P}$.

4 - Pour $u \in \mathscr{P}$, on définit la suite $u' \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = u_{n+1} - u_n$.
a) Démontrer que, pour tout $u \in \mathscr{P}$, $u' \in \mathscr{P}$.
b) Soit l'application $D : \mathscr{P} \to \mathscr{P},\ u \mapsto u'$. Montrer que D est un endomorphisme linéaire de $\mathscr{P}$.
c) Expliciter les images $D(w)$ et $D(c)$.
d) Déterminer le noyau et l'image de D.

5 - a) Démontrer que $\mathscr{P}$ est stable par D, c'est-à-dire que $D(\mathscr{P}) \subset \mathscr{P}$.
b) Notons $\tilde{D} : \mathscr{P}_0 \to \mathscr{P}_0,\ u \mapsto u$ l'endomorphisme de $\mathscr{P}_0$ induit par D. Démontrer que $\tilde{D}$ est un automorphisme linéaire de $\mathscr{P}_0$.
c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé. Déterminer l'ensemble des suites $u \in \mathscr{P}_0$ telles que $\tilde{D}(u) = \lambda u$.

Problème 43
Etude d'une matrice

[Algèbre linéaire, matrices]

On considère la matrice à coefficients réels $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

On note les éléments de $\mathbb{R}^3$ sous forme de matrices colonnes : par exemple, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On note $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $\forall X \in \mathbb{R}^3 \; u(X) = AX$.
On note enfin $\ker A$ et $\operatorname{im} A$ le noyau et l'image de u.

1 - a) Déterminer le noyau de A. On précisera sa dimension, et on en donnera une base.
b) En déduire le rang de A.
c) Calculer A^2 et A^3. Observer une relation liant A et A^3.

2 - On considère un couple (λ, X), où λ est un réel, et $X \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n X = \lambda^n X$.
b) En déduire que $\lambda^3 = \lambda$. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
On notera ces valeurs λ_1, λ_2, λ_3. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $E_{\lambda_i} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid AX = \lambda_i X\}$.
c) Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, déterminer E_{λ_i}. On montrera que E_{λ_i} est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, dont on donnera un vecteur directeur e_i.

3 - On considère la famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ obtenue à la question **2 - c)** .
a) Démontrer que la famille $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire la matrice D de l'application u_A dans la base $\mathscr{E}$.
c) Ecrire la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{C}$ à la base $\mathscr{E}$.
d) Calculer la matrice de passage Q de la base $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{C}$. Que peut-on dire des matrices P et Q ?
e) Ecrire une relation liant les matrices A, D, P et Q.

Problème 44 ✻

Matrices stochastiques

[Algèbre linéaire, matrices]

Soit p un entier naturel non nul fixé. Une matrice $A = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ sera dite stochastique si :

(i) $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \quad a_{ij} \geqslant 0$;

(ii) $\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1$.

On notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

0 - Donner un exemple de matrice stochastique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On souhaiterait de plus que tous les coefficients de cette matrice soient non nuls.

1 - a) L'ensemble $\mathscr{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$?
b) Montrer que pour tout réel $\lambda \in [0,1]$ et tout couple $(A,B) \in \mathscr{S}^2$, on a $\lambda A + (1-\lambda)B \in \mathscr{S}$.
c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ est stable par la multiplication des matrices.

On note les éléments de $\mathbb{R}^p$ sous forme de matrices colonnes.

Etant donné $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, on appelle *norme* de X le réel : $\|X\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant p} |x_k|$

On fixe désormais une matrice $A \in \mathscr{S}$, et on note $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p,\ X \mapsto AX$.
On appelle *valeur propre* de l'endomorphisme u (et aussi de la matrice A) tout réel λ tel que :

$$\exists X \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\} \quad u(X) = \lambda X.$$

On insiste sur le fait que le vecteur X est non nul ; un tel vecteur est appelé un *vecteur propre* de u, ou de A, associé à la valeur propre λ.

a) Démontrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^p$, $\|u(X)\| \leqslant \|X\|$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u^n(X)\| \leqslant \|X\|$.
b) Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
c) Démontrer que le réel 1 est valeur propre de A. On précisera un vecteur propre associé à cette valeur propre.

3 - On considère ici une valeur propre λ de u telle que $|\lambda| = 1$. On note Id l'application identité dans $\mathbb{R}^p$.
a) Soit $X \in \ker\left([u - \lambda \mathrm{Id}]^2\right)$, et $Y = [u - \lambda \mathrm{Id}](X)$.
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u^n(X) = \lambda^n X + n\lambda^{n-1} Y$.
En déduire, à l'aide de la question **2 - a)** , que le vecteur Y est nul.
b) Démontrer que $\ker\left([u - \lambda \mathrm{Id}]^2\right) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ker\left([u - \lambda \mathrm{Id}]^n\right) = \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$.

Problème 45 $\ast$

Des matrices semblables à leur inverse

[Algèbre linéaire, matrices]

D'après un sujet du concours des Mines de première année, 2002

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension 3**.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

On rappelle que si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathscr{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1 - On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une relation réflexive, symétrique et transitive.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2 - Démontrer que deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de déterminants différents ne sont pas semblables.

3 - Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.

On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

a) Montrer que $\operatorname{im} w \subset \ker u^i$.

b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

4 - Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\operatorname{rang} u = 2$.

a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).

b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

c) Écrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5 - Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\operatorname{rang} u = 1$.

a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.

c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

6 - Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

7 - Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

8 - On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

9 - On suppose dans cette question que $\operatorname{rang}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **4**., une matrice semblable à la matrice M.
b) Calculer M^3 et déterminer $\operatorname{rang}(M)$.
c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

10 - On suppose dans cette question que $\operatorname{rang}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

11 - Exemple : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.
a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).
b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.
c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

12 - Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Problème 46 **

Idéaux à droite de l'anneau $\mathscr{L}(E)$

[Algèbre linéaires, anneaux]

On considère un espace vectoriel E de dimension n finie sur le corps $\mathbb{R}$. On rappelle que l'ensemble des endomorphismes linéaires de E, noté $\mathscr{L}(E)$, est muni des lois $+$ et $\circ$, qui en font un anneau, non commutatif si $n \geqslant 2$.

Si I est une partie de $\mathscr{L}(E)$, on dit que I est un *idéal à droite* de $\mathscr{L}(E)$ si I est un sous-groupe de $(\mathscr{L}(E), +)$, et si :

$$\forall f \in I \quad \forall g \in \mathscr{L}(E) \quad f \circ g \in I.$$

L'objectif de ce problème est caractériser les idéaux à droite de $\mathscr{L}(E)$.

0 - Préliminaire. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E, et S un supplémentaire de son noyau $\ker f$. On définit l'application $\alpha : S \to \operatorname{im} f$ en posant $\alpha(x) = f(x)$. Montrer que α est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1 - Un exemple. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On note $I_F = \{f \in \mathscr{L}(E) \,|\, \operatorname{im} f \subset F\}$. Montrer que I_F est un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$.

2 - Idéal à droite engendré par un élément. On fixe un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, et on pose $J_f = \{f \circ g, \ g \in \mathscr{L}(E)\}$.

a) Montrer que J_f est un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$, et que $f \in J_f$.

b) Soit I un idéal à droite de $L(E)$ tel que $f \in I$. Montrer que $J_f \subset I$.

On dit que J_f est l'idéal à droite engendré par l'élément f.

c) Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{im} h \subset \operatorname{im} f$. Soit S un supplémentaire de $\ker f$, et $\alpha : S \to \operatorname{im} f$ l'isomorphisme introduit en **préliminaire**. On définit l'application $g : E \to E$ en posant $g(x) = \alpha^{-1}(h(x))$.

Justifier que l'application g est bien définie et linéaire, et montrer que $h = f \circ g$. En déduire que $h \in J_f$.

d) On pose $F = \operatorname{im} f$. Montrer que $J_f = I_F$.

3 - Caractérisation des idéaux à droite. Soit I un idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$.

Soient f_1 et f_2 des éléments de I, et $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{im} h \subset \operatorname{im} f_1 + \operatorname{im} f_2$. On note $F = \operatorname{im} f_1 + \operatorname{im} f_2$.

a) On suppose *dans cette question seulement* que $\operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2 = \{0\}$. Soit alors $p_1 : F \to \operatorname{im} f_1$ (resp. $p_2 : F \to \operatorname{im} f_2$) la projection sur $\operatorname{im} f_1$ (resp. $\operatorname{im} f_2$) parallèlement à $\operatorname{im} f_2$ (resp. $\operatorname{im} f_1$).

On définit $k_1 : E \to E$ (resp. k_2) en posant $k_1(x) = p_1(h(x))$ (resp. $k_1(x) = p_1(h(x))$). Montrer que k_1 et k_2 sont bien définis. Que dire de leurs images respectives ?

En remarquant que $h = k_1 + k_2$, et en utilisant la question **2**, montrer que $h \in I$.

b) On ne suppose plus que $\operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2 = \{0\}$. Soit alors G un supplémentaire de $\operatorname{im} f_1 \cap \operatorname{im} f_2$ dans $\operatorname{im} f_2$. Montrer que $F = \operatorname{im} f_1 \oplus G$.

Montrer alors, comme à la question précédente, que $h \in I$.

c) On pose $k = \max\{\operatorname{rang} f, \ f \in I\}$ (justifier cette définition). On fixe $f_1 \in I$ tel que $\operatorname{rang} f_1 = k$. Soit f_2 un autre élément de I. Montrer que $\operatorname{im} f_2 \subset \operatorname{im} f_1$.

Indication : on procédera par l'absurde ; supposant $\operatorname{im} f_2 \not\subset \operatorname{im} f_1$, on montrera qu'il existe $h \in I$ tel que $\operatorname{im} h = \operatorname{im} f_1 + \operatorname{im} f_2$, et on obtiendra une contradiction.

d) Notons $F_1 = \operatorname{im} f_1$. Montrer que $I = I_{F_1}$.

On a ainsi montré que tout idéal à droite de $\mathscr{L}(E)$ est du type introduit à la question **1**.

4 - Somme et intersection d'idéaux à droite (bonus).

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E.

a) Montrer que $I_{F\cap G} = I_F \cap I_G$.
b) Montrer que $I_{F+G} = I_F + I_G$.

5 - (questions subsidiaires)

a) Que dire des idéaux à gauche (dont je vous laisse deviner la définition) de $\mathscr{L}(E)$?
b) Que dire en dimension infinie ?

Problème 47 ✻

Commutant des endomorphismes cycliques

[Algèbre linéaire, polynômes, anneaux]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $u : E \to E$ un endomorphisme de E.
On notera Id_E l'endomorphisme identité de E. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera u^n pour $u \circ \ldots \circ u$ (n facteurs), et on notera, selon la convention usuelle, $u^0 = \mathrm{Id}_E$.

A - Etude du commutant d'un endomorphisme

On appelle commutant de u l'ensemble $\mathrm{Z}(u)$ des endomorphismes de E qui commutent avec u :

$$\mathrm{Z}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}.$$

0 - Déterminer $\mathrm{Z}(\mathrm{Id}_E)$.

1 - a) Montrer que $\mathrm{Z}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
b) Montrer que $\mathrm{Z}(u)$ est stable par la loi de composition «$\circ$». En déduire que c'est un sous-anneau de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$.
c) Soit $v \in \mathrm{Z}(u)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par v si $v(F) \subset F$.
Montrer que le noyau et l'image de u sont stables par v.

2 - Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$, (où n est un entier supérieur ou égal au degré de P), on définit un endomorphisme de E, noté $P(u)$, en posant :

$$P(u) = a_0\mathrm{Id}_E + a_1u + \ldots + a_nu^n.$$

On note $\mathscr{P}_u = \{P(u)\,;\ P \in \mathbb{R}[X]\}$.
a) Montrer que $u \in \mathrm{Z}(u)$.
b) En déduire que $\mathscr{P}_u \subset Z(u)$. *[On pourra commencer par les polynômes de type X^n, pour $n \in \mathbb{N}$.]*
c) L'inclusion établie à la question précédente peut-elle être stricte ? *[On demande un résultat justifié avec précision.]*

B - Etude des endomorphismes cycliques

On dit que u est un endomorphisme cyclique de E s'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathscr{F}_x = (x, u(x), u^2(x))$ soit une base de E.
Le but de cette partie est de montrer que, si u est un endomorphisme cyclique, alors $\mathrm{Z}(u) = \mathscr{P}_u$.
On suppose donc que u est un endomorphisme cyclique, et on fixe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathscr{F}_x = (x, u(x), u^2(x))$ soit une base de E.

3 - Soit $v \in \mathrm{Z}(u)$.
a) Montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que $v(x) = \alpha x + \beta u(x) + \gamma u^2(x)$.
b) Montrer que $v = \alpha\mathrm{Id}_E + \beta u + \gamma u^2$. *[On pourra considérer l'image par les endomorphismes v et $\alpha\mathrm{Id}_E + \beta u + \gamma u^2$ de chacun des vecteurs de la base $\mathscr{F}_x$.]*

4 - Montrer que $\mathrm{Z}(u) = \mathscr{P}_u$.

C - Un exemple

Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit le polynôme $u(P) = [XP(X)]'$.

5 - a) Montrer qu'on définit ainsi un endomorphisme u de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ (dont on rappellera la dimension).

b) Calculer le déterminant : $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

c) Etant donnés des réels a, b, c, on pose $P = a + bX + cX^2$. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer le déterminant, dans cette base, de la famille $(P, u(P), u^2(P))$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la famille $(P, u(P), u^2(P))$ soit une base de E.

d) En déduire que u est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}_2[X]$.

6 - Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ qui commute avec u. Montrer qu'il existe des réels α, β, γ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad v(P) = \alpha P + \beta X P' + \gamma X^2 P''.$$

D - Deux autres exemples

7 - On suppose que u est un endomorphisme nilpotent de E, et plus précisément que $u^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^3 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que u est un endomorphisme cyclique.
[On pourra considérer un vecteur $x \in E \setminus \ker(u^2)$.]

8 - On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer l'ensemble $Z(A)$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice A.
[On pourra étudier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.]

Problème 48 **

Endomorphismes linéaires semi-simples

[Algèbre linéaire]

Dans tout le problème, $(E, +, \perp)$ désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$, et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathscr{L}(E)$, on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$. On note alors $u_F : F \to F,\ x \mapsto u(x)$ l'endomorphisme de Finduit par u.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat : tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire dans E.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, on dit que u est un endomorphisme **semi-simple** de E si, et seulement si, tout sous-espace vectoriel de E stable par u possède au moins un supplémentaire également stable par u.

Préliminaire

1 - Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
a) Soit $a \in E$, et $D_a = \mathrm{Vect}(a) = \{\lambda a\,;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que D_a est stable par u si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(a) = \alpha a$.
b) Démontrer que, si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E stables par u, alors la somme et l'intersection de F et G sont stables par u.

2 - a) L'endomorphisme identité Id_E est-il semi-simple ?
b) L'endomorphisme nul $0_{\mathscr{L}(E)}$ est-il semi-simple ?
c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. L'homothétie h_λ est-elle semi-simple ?

Les endomorphismes nilpotents

Dans cette partie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est supposé nilpotent et non nul, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ (les puissances s'entendent pour la loi $\circ$).

3 - Démontrer que $\ker u$ est distinct de E et de l'espace nul $\{0_E\}$.

4 - Soit F un sous-espace vectoriel de E, stable par u et non inclus dans $\ker u$.
a) Soit $x \in F \setminus \ker u$. Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $u^k(x) = 0_E$ et $u^{k-1}(x) \neq 0_E$.
b) En déduire que $F \cap \ker u \neq \{0_E\}$.

5 - L'endomorphisme nilpotent u est-il semi-simple ?

Les projecteurs

Dans cette partie, $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur de l'espace vectoriel E.

6 - Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Démontrer que $F = (F \cap \ker p) \oplus (F \cap \mathrm{im}\ p)$, c'est-à-dire que $F \cap \ker p$ et $F \cap \mathrm{im}\ p$ sont supplémentaires *dans* F.

7 - Soit K un sous-espace vectoriel de $\ker p$ et I un sous-espace vectoriel de $\mathrm{im}\ p$. Soit K' un supplémentaire de K dans $\ker p$ et I' un supplémentaire de I dans $\mathrm{im}\ p$.
Montrer que $K + I$ et $K' + I'$ sont supplémentaires dans E.

8 - Le projecteur p est-il semi-simple ?

Les symétries

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une symétrie vectorielle de E.

9 - Montrer que s est en endomorphisme semi-simple de E.

Les endomorphismes induits

Dans cette partie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est quelconque.

10 - Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que, si u est semi-simple, alors l'endomorphisme induit u_F l'est aussi.

Problème 49 ***

Les quarts de tours en dimension 4

[Algèbre linéaire euclidienne, géométrie vectorielle]

On fixe dans ce problème un espace vectoriel euclidien E de dimension 4. Etant donné $(x, y) \in E^2$, on note $\langle x, y\rangle$ leur produit scalaire, et $\|x\|$ la norme euclidienne de x.

On appelle quart de tour tout automorphisme orthogonal $q \in O(E)$ tel que $q \circ q = -\mathrm{id}_E$. On note $\mathscr{Q}$ l'ensemble des quarts de tours.

On note enfin $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1 - Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que $q(x)$ est un vecteur unitaire orthogonal à x.

2 - Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E, et $q \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(q) = M$. Montrer que q est un quart de tour.

3 - Soit q un quart de tour et $x \in E$ un vecteur unitaire. On pose $P = vect(x, q(x))$. Montrer que P est un plan vectoriel stable par q, et que $(x, q(x))$ en est une base orthonormale. Préciser la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit $q_P = (q_{|P})^{|P}$. Quelle est la nature géométrique de cet endomorphisme ?

4 - Montrer que le sous espace $P^{\perp}$ est également stable par l'endomorphisme q.

5 - A l'aide des questions 3 et 4, montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(q) = M$.
Quel est le déterminant de q ?

6 - Soit $q \in \mathscr{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = (\cos\alpha)\mathrm{id}_E + (\sin\alpha)q$. Montrer que $f \in O(E)$.
Soit $x \in E$ un vecteur unitaire. Montrer que x est contenu dans un plan P stable par f. Quelle est la nature géométrique de l'endomorphisme induit par f sur P ?
Quel est le déterminant de f ?

7 - Soit (x, y) une famille orthonormale de E. Combien existe-t-il de quarts de tours q tels que $q(x) = y$?

Problème 50 **

Méthode des moindres carrés

[Algèbre linéaire euclidienne, polynômes]

Dans ce problème, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$, et on note $\mathbb{R}_{2p}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2p$. On identifie $\mathbb{R}$ au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants.
Etant donné $(A, B) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^2$, on pose $\langle A, B\rangle = \frac{1}{2p+1}\sum_{i=-p}^{p} A(i)B(i)$.

1 - a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2p}[X]$.
Etant donné $(A, B) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^2$, on définit :

- *(i)* la norme euclidienne de A : $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$;
- *(ii)* l'espérance de A : $E(A) = \langle A, 1\rangle$;
- *(iii)* la variance de A : $V(A) = \|A - E(A)\|^2$;
- *(iv)* la covariance de A et B : $Cov(A, B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$.

b) Calculer les normes euclidiennes des polynômes 1, X et X^2.

2 - Démontrer, pour tout $(A, B) \in (\mathbb{R}_{2p}[X])^2$:
a) $V(A) = \|A\|^2 - E(A)^2$ et $Cov(A, B) = \langle A, B\rangle - E(A)E(B)$;
b) Si A est pair et B impair, alors $\langle A, B\rangle = 0$;
c) Si A et B sont de degré inférieur ou égal à $2p - 1$, alors $\langle XA, B\rangle = \langle A, XB\rangle$.

3 - Soit $A \in \mathbb{R}_{2p}[X]$ fixé.
a) Déterminer, en fonction de $E(A)$, le projeté orthogonal de A sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
b) Déterminer, en fonction de $V(A)$, la distance de A au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le degré de A pour que $V(A) \neq 0$. Cette condition étant vérifiée, déterminer une base orthonormale, de premier vecteur le polynôme 1, du sous-espace vectoriel $vect(1, A)$.

5 - Soient A et B deux éléments de $\mathbb{R}_{2p}[X]$. On suppose $\deg(A) \geqslant 1$.
a) Soit $m = \min_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2} \|B - \lambda A - \mu\|^2$. Déterminer la valeur de m en fonction de $V(A)$, $V(B)$ et $Cov(A, B)$. Préciser les valeurs λ_0 et μ_0 de λ et μ pour lesquelles ce minimum est atteint.
b) Démontrer que $|Cov(A, B)| \leqslant \sqrt{V(A)}\sqrt{V(B)}$. Dans quel cas y a-t-il égalité dans cette inégalité ?
c) *Application :* déterminer (en fonction de l'entier p) le réel $m = \min_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2} \|X^2 - \lambda A - \mu\|^2$, et les valeurs de λ et μ pour lesquelles le minimum est atteint.

Problème 51 **

Trace et formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

[Algèbre linéaire euclidienne, matrices]

On fixe dans ce problème un entier $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de sa structure canonique de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et de la multiplication habituelle des matrices.

Soit $A = [a_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de A le réel $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$. On admet que l'application $\operatorname{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

1 - Etant donnée une matrice $U \in M_n(\mathbb{R})$ **non nulle**, on définit $t_U : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ A \mapsto \operatorname{tr}(UA)$ et $H_U = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(UA) = 0\}$. Montrer que H_U est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et préciser sa dimension.

2 - On définit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R},\ (A,B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3 - Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe une unique matrice $U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f = t_U$.

4 - a) Soit $r \in [\![0,n]\!]$; on note J_r la matrice carrée de taille n qui s'écrit par blocs : $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On pose $K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer la matrice J_rK et sa trace.

b) *plus difficile* Montrer que tout hyperplan H de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ contient au moins une matrice inversible (on demande une démonstration précise, à l'aide des questions précédentes).

Problème 52 *

Puissances, commutant de matrices

[Algèbre linéaire, espaces vectoriels euclidiens, matrices]

D'après un sujet du concours des Mines de première année, 1998

Dans tout le problème, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et rapportée à sa base canonique (orthonormée) notée (e_1, e_2, e_3).

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

1. Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$, $e'_3 = (1, 1, -2)$.
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3). Donner une relation entre les matrices S et S'.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer S'^n et donner une méthode pour calculer S^n. (on ne demande pas d'effectuer les calculs)
3. (a) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que S^2 peut s'exprimer comme combinaison linéaire de I_3 et S.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tels que
   $$S^n = a_n I_3 + b_n S$$
   (d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (e) Montrer que la suite $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que la suite $(b_n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression de a_n et b_n pour tous les n.
4. Soit $B = S - 2I_3$.
   (a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B.
   (b) Comparer avec le résultat de la question 3.
5. L'expression de S^n obtenue aux questions 3. et 4. est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On pose

$$u = f \circ s^{-1}$$

et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U, vérifier que u est un automorphisme orthogonal et que

$$u \circ s = s \circ u = f$$

2. Soit (e''_1, e''_2, e''_3) la famille obtenue en normant les vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) de la question 2. de la première partie.
   (a) Montrer que (e''_1, e''_2, e''_3) est une base orthonormale.
   (b) Écrire la matrice U' de u dans cette base.
3. (a) Exprimer la matrice de s dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) en fonction de S'.
   (b) En déduire la matrice de f dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).
4. (a) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?
   (b) Soit $P = Vect(e''_2, e''_3))$. Montrer que $f(P) = P$. Soit g l'endomorphisme de P tel que $g(x) = f(x)$ pour tout x de P. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on précisera.
5. On note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f. C'est à dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $g \circ f = f \circ g$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$.
      i. Montrer que le vecteur $g(e''_1)$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?
      ii. Soit M la matrice de g dans la base (e''_1, e''_2, e''_3). Montrer que M commute avec S'^3.
      iii. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathscr{C}(f)$ dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).
   (c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathscr{C}(f)$?

Problème 53
Polynômes et fonction tangente

[Polynômes, développements limités]

Les deux problèmes présentés ici sont totalement indépendants

A - Dérivées de la fonction tangente

On définit une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$\begin{cases} B_0 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = (X^2+1)B_n' \end{cases}$$

1 - a) Calculer les polynômes B_n, pour $n \in [\![0,5]\!]$.
b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant du polynôme B_n.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients du polynôme B_n sont des entiers positifs ou nuls.
d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la parité de la fonction polynômiale $\tilde{B}_n$.
e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme B_n ne possède aucune racine réelle non nulle.

2 - Soit $f :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R},\ x\mapsto \tan x$.
a) Après avoir rappelé les développements limités en 0 des fonctions cos et sin, déterminer un développement limité de f en 0 à l'ordre 5.
b) En déduire (avec un minimum de calculs) les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in [\![0,5]\!]$.

3 - a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\quad f^{(n)}(x) = B_n(\tan x).$$

b) Retrouver le résultat de la question **2 - b)** .

c) Démontrer que la fonction f est *absolument positive* sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire que f et toutes ses dérivées sont à valeurs positives sur cet intervalle.

B - Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme

$$Q_n = (1+X)^{2n} - (1-X)^{2n}$$

   Préciser le degré de Q_n, ses termes de plus haut et de plus bas degré.

2. (a) Rechercher les racines complexes de Q_n, et en déduire la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.
   (b) En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.
   (c) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n}$.

3. Dans cette question t est un réel strictement positif.
   (a) Exprimer, à l'aide de Q_n, $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{t^2}{4n^2\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$
   (b) En déduire l'existence et la valeur, en fonction de t et $\sinh t$, de :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{t^2}{4n^2\tan^2\frac{k\pi}{2n}}\right)$$

Problème 54 ***

Polynômes de Legendre

[Polynômes, dérivation, théorème de Rolle]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme à coefficients réels $\Phi_n = (X^2 - 1)^n$ et son polynôme dérivé n-ième $P_n = \Phi_n^{(n)}$.

1 - a) Calculer P_n pour $n \in [\![0, 4]\!]$.
b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n(1)$. En vue de la question **4 - b)** , on posera $Q_n = \frac{1}{P_n(1)} P_n$.

2 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale $\tilde{P}_n$ s'annule en au moins n points distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$.
On admet, étant donné le degré du polynôme P_n, que les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont ses seules racines réelles.

3 - a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En applicant la formule de Leibniz à Φ_{n+1} et Φ'_{n+1} , démontrer les relations suivantes :

$$P_{n+1} = 2(n+1)XP_n + 2(X^2 - 1)P'_n \quad (\star) \;;$$
$$P'_{n+1} = 2(n+1)^2 P_n + 2(n+1)XP'_n \quad (\star\star).$$

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation liant P_n, P'_n et P''_n.
c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes P_n et P'_n en fonction de P_{n+1} et P'_{n+1}.

4 - a) A l'aide de la question précédente, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines de P_n «s'intercalent» entre celles de P_{n+1}.
[On pourra commencer par le vérifier pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.]
b) Sur une même figure de taille respectable, tracer l'allure des courbes représentatives sur le segment $[-1, 1]$ des fonctions polynomiales $\tilde{Q}_n$, pour $n \in [\![0, 4]\!]$.

Problème 55 ***

Les nombres de Bernoulli

[Algèbre linéaire, polynômes, dérivation, intégration]

D'après une épreuve du concours de l'ENS Fontenay-Saint Cloud, 1984.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{Q}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients rationnels de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que tous les résultats vus en cours sur les polynômes sont vrais, en particulier, dans $\mathbb{Q}[X]$.

A - Questions préliminaires

a) Montrer que, si P et Q sont des polynômes à coefficients rationnels tels que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $P(k) = Q(k)$, alors $P = Q$.

b) Soit $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que f'' s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement au point $\frac{1}{2}$, et qu'elle change de signe en $\frac{1}{2}$. On suppose de plus que $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$. Montrer alors que f s'annule, sur $]0, 1[$, uniquement au point $\frac{1}{2}$, et qu'elle change de signe en $\frac{1}{2}$.
Préciser le signe de f à gauche et à droite de $\frac{1}{2}$ en fonction de celui de f''.

B - Les polynômes de Bernoulli

On fixe, dans cette partie, un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
[On acceptera, pour les élèves qui n'y parviendraient pas dans le cas général, que les questions 1, 2 et 3 soient traitées dans le cas $n = 2$. Ces questions seront alors, bien sûr, notées avec un barème inférieur.]

1 - Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$, on définit le polynôme $\Delta(P) = P(X) - P(X - 1)$.
a) Montrer qu'on définit ainsi une application linéaire $\Delta : \mathbb{Q}_{n+1}[X] \to \mathbb{Q}_{n+1}[X]$.
b) Soit $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$ un polynôme de degré $d \in [\![0, n + 1]\!]$ et de coefficient dominant $\alpha \neq 0$. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $\Delta(P)$.
c) Déterminer le noyau de l'aplication Δ.
d) Déterminer l'image de l'application Δ (on pourra utiliser le théorème du rang).
e) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$, $\Delta(P') = [\Delta(P)]'$.
[On note P' le polynôme dérivé de P.]

2 - a) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k) = \sum_{i=0}^{k-1} i^n$;

(ii) $\Delta(P) = (X - 1)^n$ et $P(1) = 0$.

[Pour prouver (i)$\to$(ii)*, on pourra calculer* $[\Delta(P)](k)$ *pour tout entier* $k \geqslant 2$*.]*
b) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{Q}_{n+1}[X]$ qui vérifie ces propositions. On le notera désormais Q_n.
c) Déterminer le degré et le coefficient dominant de Q_n.
d) Montrer que $Q_n(0) = Q_n(1) = 0$.
e) Déterminer Q_1 et Q_2 ; vérifier que $Q_3 = \frac{X^2(X-1)^2}{4}$.

3 - Soit un entier $n \geqslant 2$.
a) Calculer le polynôme $\Delta(Q_n' - nQ_{n-1})$.
b) En déduire qu'il existe un nombre rationnel a_n tel que $Q_n' + a_n = nQ_{n-1}$.

4 - On a ainsi défini une suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que :

$$Q_1 = \frac{X(X-1)}{2} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} Q''_{n+1} = (n+1)Q'_n \\ Q_{n+1}(0) = Q_{n+1}(1) = 0 \end{cases}$$

Montrer que, si $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite de polynômes vérifiant la même propriété, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = Q_n.$$

C - Les nombres de Bernoulli

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{Q}_n = Q_n(1-X)$.
a) Calculer $\tilde{Q}_1$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Q}_3$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comparer $\Delta(\tilde{Q}_n)$ et $\Delta(Q_n)$, et en déduire une relation entre $\tilde{Q}_n$ et Q_n.
[On pourra utiliser les valeurs de Q_n et $\tilde{Q}_n$ en 0 , pour trouver une relation du type $\tilde{Q}_n = (-1)^? Q_n$.]
c) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q_{2p}(\frac{1}{2}) = 0$, $Q'_{2p+1}(\frac{1}{2}) = 0$, et $a_{2p+1} = 0$.
d) Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, Q''_{2p+2} en fonction de Q_{2p}, et Q''_{2p+1} en fonction de Q_{2p-1} et a_{2p}.

2 - Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée au polynôme Q_n.
a) Établir que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction q_{2p} ne s'annule qu'en 0, $\frac{1}{2}$ et 1, et change de signe en $\frac{1}{2}$. Montrer que le signe de q_{2p} sur $]0, \frac{1}{2}[$ est celui de $(-1)^{p+1}$.
[On raisonnera par récurrence en utilisant la question 5d).]
b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction q_{2p+1} est de signe constant sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, et que ce signe est celui de $(-1)^{p+1}$. Vérifier que c'est encore vrai pour $p = 0$.
c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, a_{2p} n'est pas nul et qu'il est du signe de $(-1)^p$.

3 - On appelle B_p le rationnel positif $(-1)^p a_{2p}$. A l'aide de la question 4, calculer les nombres B_1, B_2 et B_3.

D - Une méthode d'approximation des intégrales

Les polynômes Q_n et les nombres B_n sont ceux introduits dans la première partie. Parmi leurs propriétés, on utilisera uniquement les suivantes :

(i) $Q_1 = \frac{X(X-1)}{2}$;
(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q'_{2n+2} + (-1)^{n+1} B_{n+1} = (2n+2) Q_{2n+1}$;
(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q''_{2n+1} + (2n+1)(-1)^n B_n = (2n+1)(2n) Q_{2n-1}$;
(iv) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_{2n+1}(0) = Q_{2n+1}(1) = Q'_{2n+1}(0) = Q'_{2n+1}(1) = 0$;
(v) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale q_{2n+1} est de signe constant sur $[0, 1]$.

1 - Soit f une fonction 3 fois continuement dérivable sur le segment $[0, 1]$. Montrer l'égalité :

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \int_0^1 Q_1(x) f^{(3)}(x)\, dx.$$

2 - Soit n un entier naturel et f une fonction $2n+3$ fois continuement dérivable sur le segment $[0, 1]$.
a) Montrer l'égalité :

$$f(1) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(1)}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p B_p}{(2p)!} \left[f^{(2p)}(1) - f^{(2p)}(0) \right] + R_n,$$

où le reste R_n est égal à l'intégrale : $\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 Q_{2n+1}(x) f^{(2n+3)}(x)\, dx$.
[Par récurrence...]

b) On pose $M = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(2n+3)}(x)|$. Justifier cette définition.

c) Montrer que la valeur absolue de R_n est majorée par $\frac{B_{n+1}M}{(2n+2)!}$.

3 - Établir, pour une fonction g $2n+2$ fois continuement dérivable sur un segment $[a, b]$ et un entier m supérieur ou égal à 2, la formule de calcul approché de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{x=a}^{b} g(x)\,dx = \; & \tfrac{b-a}{2m}\left[g(a) + g(b) + 2\textstyle\sum_{k=1}^{m-1} g(a + k\dfrac{b-a}{m})\right] \\ & + \textstyle\sum_{p=1}^{n} \tfrac{(-1)^p B_p}{(2p)!}(\tfrac{b-a}{m})^{2p}\left[g^{(2p-1)}(b) - g^{(2p-1)}(a)\right] + R'_n\end{aligned}$$

où la valeur absolue du reste R'_n est majorée par :

$$\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}m\Big(\frac{b-a}{m}\Big)^{2n+3}M', \quad \text{où } M' = \sup_{x\in[0,1]} |g^{(2n+2)}(x)|.$$

Problème 56 ***

Polynômes de Bezout de X^n et $(1-X)^n$

[Polynômes, arithmétique dans $\mathbb{R}[X]$]

Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geqslant 1$, et on note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels de degré au plus $n-1$.

On se propose d'étudier les couples (F_n, G_n) de polynômes vérifiant :

$$(\mathscr{P}_n) \qquad F_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad F_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \text{et} \quad (1-X)^n F_n + X^n G_n = 1.$$

A - Etude des couples (F_n, G_n)

1 - a) Déduire du développement de $((1-X)+X)^{2n-1}$ l'existence d'un couple (F_n, G_n) solution de $(\mathscr{P}_n)$.

[On ne cherchera pas ici à calculer les coefficients de F_n et G_n.]

b) Expliciter les polynômes F_1, F_2 et F_3 et, pour chacun d'eux, déterminer ses racines réelles.

2 - a) Déterminer, en fonction des polynômes F_n et G_n obtenus précédemment, tous les couples $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $(1-X)^n A + X^n B = 1$.

b) Démontrer l'unicité du couple (F_n, G_n) solution de $(\mathscr{P}_n)$.

3 - a) Calculer $F_n(0)$.

b) Calculer $F_n(1)$.

c) Démontrer que $G_n = F_n(1-X)$.

d) Calculer $F_n(\frac{1}{2})$.

B - Une équation différentielle vérifiée par F_n

On suppose ici, et jusqu'à la fin du problème, $n \geqslant 2$.

4 - a) *plus difficile* Déduire de $(\mathscr{P}_n)$ et de la question **3 - b)** que la fonction polynômiale $\tilde{F}_n$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$ny - (1-x)y' = n\binom{2n-1}{n} x^{n-1} \qquad (E).$$

b) En déduire une relation de récurrence sur les coefficients du polynôme F_n, puis calculer ces coefficients. On vérifiera qu'ils sont tous strictement positifs.

5 - Déduire de ce qui précède les égalités :

a) $\binom{2n-2}{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{2n-1}{k}$;

b) $\binom{2n-1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+n-1}{k}$.

C - Nombre de racines réelles de F_n

On a toujours $n \geqslant 2$. On pose $A_n = (1-X)^n F_n$.

6 - a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme A_n.

b) Démontrer que 0 et 1 sont des racines du polynôme dérivé A_n' de A_n. Préciser l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines.

7 - En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A_n(x) = 1 - n\binom{2n-1}{n} \int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1} dt$.

Quelle est la valeur de $\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1} dt$ pour $x = 1$?

8 - a) Etudier, en discutant selon l'entier naturel n, le signe de la fonction polynômiale $\tilde{A}_n$. En déduire le signe de la fonction polynomiale $\tilde{F}_n$.

b) Démontrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le polynôme F_{2p} admet une unique racine réelle, et que celle-ci est strictement négative.