MPSI

Mathématiques

Programme de Mathématiques

de la classe préparatoire

MPSI

Aller à la table des matières

Préambule

Aller à la table des matières

Objectifs généraux de formation

L'enseignement des mathématiques dans la filière Mathématiques et Physique (MP) a pour vocation d'apporter les connaissances fondamentales et les savoir-faire indispensables à la formation générale des scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, enseignants ou chercheurs ; il développe les aptitudes et les capacités des élèves selon les axes majeurs suivants :

- l'acquisition de connaissances et la maîtrise de techniques usuelles ;
- le développement simultané du sens de la rigueur et du goût du concret ;
- l'éveil de la curiosité intellectuelle et le développement de l'esprit critique, de recherche et de synthèse ;
- le développement de l'initiative, de l'autonomie et des capacités d'expression et de communication.

Son objectif est double. D'une part, il permet de développer des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques aux mathématiques. D'autre part, il contribue à fournir un langage, des représentations et des méthodes dont les autres disciplines scientifiques étudiées dans ces classes et au-delà, comme la physique, la chimie, l'informatique et les sciences industrielles, sont demandeuses ou utilisatrices.

Une formation mathématique de qualité doit développer non seulement la capacité à acquérir des connaissances et à les appliquer à des problèmes préalablement répertoriés, mais aussi l'aptitude à étudier des problèmes plus globaux ou des questions issues de situations réelles. Certaines situations nécessitent la conception d'outils nouveaux pour les traiter. Ainsi, la réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent des objectifs majeurs.

Il est attendu que la pratique du raisonnement mathématique à travers les notions étudiées dans le cadre de ce programme concourt à la formation de l'esprit des élèves : la rigueur du raisonnement, l'esprit critique, l'analyse et le contrôle des hypothèses et des résultats obtenus et leur pertinence au regard du problème posé, le sens de l'observation et celui de la déduction trouvent en mathématiques un champ d'action où ils seront cultivés de manière spécifique.

Pour aider les élèves à effectuer la synthèse des connaissances acquises dans les différents domaines qu'ils ont étudié, il est souhaitable de mettre en lumière les interactions des champs de connaissance. La concertation entre les enseignants par classe, discipline ou cycle peut y contribuer efficacement ; la cohérence et une organisation coordonnée entre les diverses disciplines est fondamentale. Il importe d'éviter les redondances tout en soulignant les points communs, de limiter les divergences ou ambiguïtés dues à la diversité des points de vue possibles sur un même objet tout en enrichissant l'enseignement par cette même diversité.

Les élèves doivent aussi être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel, en libérant les élèves des aspects calculatoires ou techniques (calcul, dessin, représentation graphique), leur permet de se concentrer sur la démarche. Les concepts mathématiques sous-jacents sont mis en avant et l'interprétation des résultats obtenus est facilitée. L'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles devient possible.

Concernant les capacités d'expression et de communication, cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, exposés de TIPE) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

Aller à la table des matières

Il est aussi souhaitable que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques rendent compte des interactions entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique. Ils montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière. Dans ce sens, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre problèmes et outils conceptuels ; les seconds sont développés pour résoudre les premiers mais deviennent à leur tour, et aux mains des mathématiciens, des objets d'étude qui posent de nouveaux problèmes et peuvent ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de première année MPSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en chapitres (numérotées 1, 2, ...). Chaque chapitre comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires.

- le bandeau définit les objectifs essentiels, délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le

Aller à la table des matières

sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

La chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

Contenu du programme

Le programme défini un corpus de connaissances requises et de capacités attendues, et explicite des aptitudes et des compétences qu'une activité mathématique bien conçue est amène de développer. Il permet à tous les élèves d'acquérir progressivement le niveau requis pour la poursuite des enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études dans différents établissements de l'enseignement supérieur ; il leur permet également de se réorienter et de se former tout au long de leur parcours.

Le programme porte d'une part sur le secteur de l'analyse et des probabilités, et d'autre part sur celui de l'algèbre et de la géométrie. L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement, à la modélisation et à la représentation, d'établir des liens avec d'autres disciplines, et de nourrir les thèmes susceptibles d'être abordés lors des TIPE.

Le programme d'algèbre comprend l'étude de l'arithmétique des entiers relatifs et des polynômes à une indéterminée, et celle des notions de base de l'algèbre linéaire pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique, algèbrique et numérique.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction ; il combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Les interactions entre les aspects discret et continu y sont mises en valeur.

L'enseignement des probabilités fournit un modèle mathématique prenant en compte l'aspect aléatoire d'un phénomène. Il permet ainsi d'aborder des situations réelles où le hasard intervient. En première année seules les variables aléatoires discrètes sont étudiées.

Le programme aborde les notions de convergence et de comparaison des ordres de grandeur (étude locale), l'étude des propriétés globales des fonctions liées à la continuité et à la dérivabilité, l'étude des probabilités et des variables aléatoires discretes ainsi que les notions de dimension et de rang en algèbre linéaire et quelques notions de base sur le produit scalaire et la géométrie euclidienne. Il développe les techniques relatives à

- à l'usage des inégalités (accroissements finis, convexité, Taylor-Lagrange,Cauchy-Schwarz, etc.) ;
- aux calculs sur les nombres (entiers, réels, complexes) et les polynômes ;
- à la pratique des développements limités et leurs applications ;
- à l'étude de la convergence ou de la divergence d'une suite, d'une série ou d'une intégrale ;
- à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires ;
- au calcul matriciel et à celui des déterminants ;
- à la pratique d'algorithmes divers.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes (algorithmes du pivot de Gauss, d'Euclide, de Hörner, de Gram-Schmidt, méthodes de Newton et des approximations successives, méthodes de calcul approché d'intégrales, etc.) qui doivent être connus et pratiqués par les élèves. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de première année MPSI est présenté en deux grandes parties, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la preimère période est étudié complètement en premier lieu, lors des cinq premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé. Le programme doit être traité en veillant á alterner, de préférence, des chapitres d'analyse et de probabilité d'une part et d'algèbre et de géométrie euclidienne de l'autre.

Les objectifs majeurs du programme de la première période sont les suivants :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures en commençant les cours dans le prolongement des programmes du cycle du baccalauréat scientifique, mettant ainsi à profit les connaissances acquises au lycée ;
- familiariser les élèves avec la terminologie française ;
- amener les élèves vers des problèmes effectifs d'analyse, de probabilités, d'algèbre ou de géométrie en veillant à développer leur
  - intuition ;
  - capacité à formuler clairement des résultats ou des raisonnements ;
  - capacité à mettre au point des démonstrations.
- susciter la curiosité et l'intérêt des élèves en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux ;
- donner les bases mathématiques indispensables à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (physique, chimie, sciences industrielles, informatique, ...) ;
- d'éviter de proposer des exposés formels plus ou moins dogmatiques et inconsistants.

Recommandations pédagogiques pour le choix d'une progression

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les chapitres qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité[1] des élèves et en évitant tout dogmatisme. En effet l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu doit motiver les élèves, favoriser l'acquisition des connaissances et permettre le développement de leurs compétences et capacités.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. "Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." Benjamin Franklin (« Dis-moi et j'oublie, enseignes-moi et je peux me rappeler, impliques-moi et j'apprends. »)

Aller à la table des matières

Première période

1. Vocabulaire de la théorie des ensemble et éléments de logique

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux élèves pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique.

Ces notions doivent être introduites de manière progressive, au fur et à mesure des besoins et des exemples rencontrés dans le programme, en vue d'être acquises en fin de la première période. Elles ne doivent faire l'objet d'aucune étude exhaustive bloquée en début d'année.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

On suppose les élèves familiers avec la théorie naïve élémentaire des ensembles. L'objectif est de fixer la terminologie.

Implication. Condition nécessaire, suffisante. Négation d'un énoncé.	Les élèves doivent être capables formuler la négation d'un énoncé.
Raisonnement par contraposition ; raisonnement par l'absurde. Équivalence logique Connecteurs ET et OU.	
Quantificateurs.	Les élèves doivent être entraînés à l'emploi des quantificateurs pour formuler avec précision les énoncés mathématiques ainsi que leurs négations. On insistera sur la qualité de rédaction des textes mathématiques ou plus généralement scientifiques. En particulier l'utilisation des quantificateurs et des symboles mathématiques en tant qu'abréviations doit être évitée.

Ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Raisonnements par récurrence (faible et forte).	On ne construit pas $\mathbb{N}$, on rappelle et on utilise ses propriétés.
Ensembles. Éléments d'un ensemble, relation d'appartenance. Parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble, relation d'inclusion.	L'ensemble vide est noté $\emptyset$, l'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire. Partition d'un ensemble.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou C_E^A pour le complémentaire d'une partie A de E.
Produit cartésien d'ensembles.	
Relation binaire sur E, relation d'équivalence, relation d'ordre. Ordre partiel, ordre total.	L'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de E. La notion d'ensemble-quotient est hors programme.
Pour A partie non vide de E ordonné : notions de majorant et de minorant, de plus grand élément (maximum), et plus petit élément (minimum)	
Application (ou fonction) d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F. Restriction et prolongement.	Insister sur l'existence et l'unicité de l'image de tout élément de l'ensemble de départ E. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E. La restriction de f à A est notée $f\|_A$.
Famille indexée par un ensemble non vide.	
Indicatrice d'une partie A d'un ensemble E.	Notation 1_A. $1_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon.
Image directe, image réciproque d'une partie par une application.	Notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
Composition d'applications.	

Injection, surjection, bijection. Application réciproque d'une bijection. Composées d'injections, de surjections, de bijections. Réciproque de la composée de bijections.	L'application réciproque d'une bijection f est notée f^{-1}. La notation $f^{-1}(B)$ est cohérente.

2. Nombres complexes : calculs algébriques et applications géométriques

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises en classe de terminale du cycle du baccalauréat. Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves sachent manipuler les nombres complexes et les utiliser pour résoudre des problèmes de géométrie plane

Le programme combine les aspects suivants :

- *l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$ et les équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;*
- *l'interprétation géométrique des nombres complexes et leur utilisation en géométrie plane ;*
- *l'introduction de l'exponentielle complexe et l'étude de ses applications à la trigonométrie.*

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures.

Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.	L'ensemble $\mathbb{C}$ peut être construit à partir de $\mathbb{R}^2$ mais le programme ne comporte aucun résultat théorique sur cette construction.
Conjugaison. Opérations sur les nombres complexes, propriétés.	Compatibilité de la conjugaison avec les opérations.
Affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur.	Le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct est identifié à $\mathbb{C}$.
Module d'un nombre complexe	relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$.

Module d'un produit, module d'une somme. Interprétation géométrique de $\|z - z'\|$, distance, cercle, disque. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Cercle trigonométrique $\mathbb{U}$. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	
Définition de e^{it}, $t \in \mathbb{R}$. Relation $e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it}$. Factorisation de $e^{is} + e^{it}$. Trigonométrie circulaire. Formules d'addition. Formules d'Euler et de Moivre	Les élèves doivent savoir linéariser des puissances de fonctions circulaires, savoir exprimer simplement des sommes comme $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Forme trigonométrique re^{it} avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Coordonnées polaires.	Congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$. Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $r \cos(t - \varphi)$ (amplitude, phase).
Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{z-b}{z-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Cocyclicité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$. Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations. Cas général.	
Interprétation géométrique de la conjugaison. Réflexions du plan.	L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.
Résolution des équations du second degré.	Somme et produit des racines.
Racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe $z \neq 0$.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
Définition de l'exponentielle complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z)$, e^z.

Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

Notations $\sum$, $\prod$.

Exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.Télescopages.

Sommes doubles, sommes triangulaires. Produit de deux sommes finies.

Sommes usuelles $\sum_{k=1}^{n} k^j$ ($j = 1, 2, 3$), $\sum_{k=1}^{n} x^k$.

Factorisation de $a^n - b^n$.

Factorielle. Coefficients binomiaux.

Notation $\binom{n}{p}$.

Formule et triangle de Pascal. Formule du binôme de Newton.

3. Systèmes d'équations linéaires

Dans ce chapitre, on étudie les systèmes d'équations linéaires à coefficients réels ou complexes. Les solutions de tels systèmes sont obtenues en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes (méthode de Gauss).

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves soient capables, au moyen de l'algorithme de Gauss, de résoudre un système d'équations linéaires.

Système linéaire de n équations à p inconnues, à coefficients $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$ et second membre $b_1, \cdots, b_n$. Les $a_{i,j}$ et b_i sont éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut présenter le système sous forme de couple : tableau A des $a_{i,j}$, colonne B des b_i.

On introduit aussi T, appelé tableau augmenté, de terme général

$$t_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } j \in [[1, p]] \\ b_i & \text{si } j = p+1 \end{cases}.$$

Ces présentations simplifiées sont intéressantes pour le traitement informatique d'un système linéaire. Elle conduisent naturellement à l'utilisation de matrices.

Solutions dans $\mathbb{K}^p$ d'un système linéaire. Si s désigne le système linéaire on note $S(s)$ l'ensemble des solutions.

$S(s)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^p$.

Système linéaire homogène : les b_i sont tous nuls.

Dans le cas homogène, pour tout couple $(x_1, \cdots, x_p)$, $(x'_1, \cdots, x'_p)$ de solutions et tout couple (α, β) de $\mathbb{K}$, $(\alpha x_1 + \beta x'_1, \cdots, \alpha x_p + \beta x'_p)$ est solution.

Systèmes échelonnés : le système linéaire est échelonné quand les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. si une ligne de A est nulle, les lignes suivantes le sont aussi ;
2. quand deux lignes successives de A sont non nulles, l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne supérieure est strictement inférieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne inférieure.

Un système linéaire non nul est échelonné quand il existe un entier $k \in [\![1, n]\!]$ et une application strictement croissante $\varphi : [\![1, k]\!] \longmapsto [\![1, p]\!]$ tels que $a_{i,\varphi(i)} \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant k$, et $(j < \varphi(i)$ ou $i > k)$ implique $a_{i,j} = 0$.

Chaque premier terme non nul d'une ligne d'un système échelonné est appelé pivot.

Inconnues et équations principales ; paramètres.
Système incompatible. Système compatible.

Forme générale des solutions d'un système compatible échelonné.

Description des solutions au moyen d'une solution particuliére et des solutions du systéme homogène associé.

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire. Une opération élémentaire transforme un système linéaire s en un système linéaire s' qui possède le même ensemble de solutions.

On utilise les notations traditionnelles $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (transvection), $L_i \leftrightarrow L_j$ (échange), $L_i \leftarrow \alpha L_i$ (dilatation).

Algorithme du pivot de Gauss. En utilisant échanges de lignes et transvections on peut transformer s en s' échelonné. Noter l'égalité $S(s') = S(s)$.

Un changement d'indexation des inconnues permet, dans une ultime étape, d'obtenir un système échelonné pour lequel $\varphi(i) = i$, quel que soit $i \in [[1, k]]$. Le nombre k est un invariant du tableau A des coefficients $a_{i,j}$, cela sera démontré plus tard (rang d'une matrice).

Le nombre de paramètres est égal à la différence du nombre d'inconnues et du rang.

Exemples de résolution de systèmes linéaires. Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.

Pour des systémes de taille $n > 3$ ou $p > 3$, on utilise l'outil informatique. On met en évidence sur un exemple l'instabilité numérique de la méthode due aux erreurs d'arrondis.

4. Nombres réels

Les nombres réels sont supposés connus ; on rappelle leurs propriétés fondamentales sans pour autant adopter un point de vue axiomatique, en mettant l'accent sur le principe de la borne supérieure / inférieure.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves aient une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités et soient entraînés à l'usage de la caractérisation de la borne supérieure / inférieure.

On peut utiliser les quantificateurs pour formuler certaines propriétés des réels (notamment celles relatives à l'ordre) et obtenir leurs négations.

Nombre rationnels, réels, irrationnels. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonnée.

La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.

Valeur absolue d'un réel. Inégalités triangulaires.

Propriété d'Archimède. Partie entière. Approximations décimales d'un réel.

Notation $\lfloor x \rfloor$. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.

Majorant, minorant d'une partie non vide. Plus grand, plus petit élément d'une partie non vide (sous réserve d'existence).

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.

$[a, b]$ peut être introduit comme étant l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$.

Segment.

Intervalle admettant un plus petit et un plus grand élément

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie X non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.

Caractérisation. Notations $\sup X$ (resp. $\inf X$).

Axiome de la borne supérieure.

Partie dense de $\mathbb{R}$; densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

5. Suites numériques

Ce chapitre conjointement avec le précédent posent les fondements du programme d'analyse en MPSI. Il est consacré aux suites numériques et combine l'étude des aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) et celle des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

On soulignera l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

Suites réeles

Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.

Limite finie ou infinie d'une suite

Notation $u_n \longrightarrow l$

Unicité de la limite.

Écriture $\lim u_n = l$.

Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Exemples de formes indéterminées.
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.	
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.	Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Théorème des suites adjacentes.	
Suite extraite. Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l, alors (u_n) tend vers l.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Les élèves doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie.
Caractérisation séquensielle de la densité d'une partie de $\mathbb{R}$.	Applications : densité de $\mathbb{Q}$ et de l'ensemble des nombres décimaux.
Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup X$ (resp. $+\infty$).	

Suites complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents, théorème de Bolzano-Weierstrass.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.

Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.	Les élèves doivent savoir déterminer une expression du terme général u_n d'une telle suite en fonction de n.

6. Fonctions de la variable réelle, limites et continuité

Ce chapitre est consacré à l'étude des notions de limite et de continuité d'une fonction à valeurs réelles ou complexes. Les propriétés à caractère local sont énoncées et étudiées finement à l'aide des ε et des η.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions continues.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. On tâchera ici de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Généralités

Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \longmapsto f(x)+a$, $x \longmapsto f(x+a)$, $x \longmapsto f(a-x)$, $x \longmapsto f(ax)$, $x \longmapsto af(x)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Somme $f+g$, produit fg, composée $g \circ f$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$. Monotonie (large et stricte). Fonctions majorées, minorées, bornées.	

Limites et continuité

Les notions de limites ont déjà été abordées pour les suites, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats sans démonstrations.

Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très *simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point a considéré par la suite est toujours élément de I ou extrémité de I.

On dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré en a lorsque a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$, si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

Limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$
Unicité de la limite.	Écritures $\lim\limits_{a} f = l$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
Si f est définie en a et possède une limite l en a, alors $l = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations algébrique sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Exemples de formes indéterminées.
Composition de limites. Conservation des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$). Théorème de la limite monotone.	

Aller à la table des matières

Continuité, prolongement par continuité en un point.
Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

Opérations algébriques sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient.

Composition de fonctions continues.

Continuité sur un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Cas d'une fonction strictement monotone.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si y est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = y$. Il en résulte que l'image d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ par une fonction continue réelle définie sur I est un intervalle.

Calcul approché d'un zéro d'une fonction continue par l'algorithme de dichotomie.

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

La fonction f étant supposée continue sur I, elle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur I est continue.

Extension des définitions et résultats précédents au cas de fonctions à valeurs complexes.

Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Aller à la table des matières

7. Fonctions de la variable réelle, dérivation

Ce chapitre est consacré à l'étude de la dérivation ; on y aborde aussi les fonctions usuelles, les fonctions convexes et les suites récurrentes.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *aient une bonne maîtrise des propriétés locales et globales des fonctions dérivables et soient capables de démontrer celles qui seront étudiées à ce stade ;*
- *puissent mener l'étude d'une fonction (continuité et dérivabilité, prolongement, symétries, périodicité, domaine d'étude, sens de variations, recherche d'extremums et obtention d'inégalités, tracé du graphe et dérmination des asymptotes, tracé du graphe de la réciproque, ...) ;*
- *aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalité des accroissements finis , inégalités de convexité, inégalité de Cauchy-Schwarz, etc.).*

On attachera une importance à l'aspect géométrique des propriétés étudiées en ayant recours à de nombreuses figures pour les illustrer et les visualiser.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et sont à valeurs réelles sauf mention explicite du contraire. Le point a considéré par la suite est toujours élément de I.

Fonctions dérivabes

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

Interprétation géométrique : tangente au graphe en un point.

La dérivabilité entraine la continuité.

Dérivabilité à gauche, à droite.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient.

Dérivée d'une fonction composée, dérivée de la fonction réciproque.

Extremum local, extremum global.	
Si f est dérivable et présente un extrémum local en un point a intérieur à I alors a est un point critique de f	Un point critique est un zéro de la dérivée.
Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique. Application à l'existence de zéros d'une fonction.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\|f'\|$ est majorée par k, alors f est k-lipschitzienne.	
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et s'il existe l dans $\overline{\mathbb{R}}$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	Si $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction. Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, fonction de classe $\mathcal{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient.	
Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.	

Théorème de classe $\mathcal{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0, 1, \dots, k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Cas des fonctions complexes : extension des définitions et résultats précédents aux fonctions complexes.

Caractérisation de la dérivabilité et de la classe $\mathcal{C}^k$ en termes de parties réelle et imaginaire.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$.

Ce résultat est à justifier en utilisant l'intégration.

Étude de fonctions

Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude.

Tableau de variations.

Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.

Asymptotes.
Tracé du graphe.
Graphe d'une réciproque.

Fonctions usuelles

Les fonctions puissances, l'exponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus sont décrites en détail mais leur existence est admise ; leurs propriétés peuvent être démontrées en partie. On en déduit l'étude des autres fonctions usuelles.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves aient une bonne connaissance des fonctions usuelles et soient en particulier capables de se représenter leur graphe, de définir les fonctions trigonométriques réciproques (circulaires et hyperboliques), de manipuler les formules d'addition, etc.

Notations internationales standard : exp, ln, cos, sin, tan, cot, cosh, sinh, tanh, coth, arccos, arcsin, arctan, arccosh, arcsinh, arctanh.

Aller à la table des matières

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivées, variations et graphes.
Relations fonctionnelles.	$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques. Leurs fonctions réciproques.	sin, cos, tan, sinh, cosh, tanh. arcsin, arccos, arctan, arcsinh, arccosh, arctanh.
Fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.	

Fonctions convexes

L'objectif de cette section est d'introduire brièvement la notion de partie convexe du plan $\mathbb{R}^2$ en vue d'étudier les fonctions convexes d'une variable réelle ; la notion de barycentre est introduite exlusivement pour aborder la convexité.

Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures. On soulignera l'intérêt des fonctions convexes pour obtenir des inégalités.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, notions de barycentre et de partie convexe ; caractérisation d'une de partie convexe à l'aide de barycentres à coefficients positifs.	
Fonctions à valeurs réelles convexes ; inégalité de convexité. Fonctions concaves.	Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x, y) de I^2 et tout λ de $[0, 1]$: $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$
Inégalité de Jensen	Si f est convexe sur I, x_1, $x_2, \dots, x_n$ des points de I et λ_1, $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{R}^+$ de somme 1 alors $$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Caractérisations : convexité de l'épigraphe, position relative du graphe et d'une de ses cordes, inégalité des pentes.

Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I.

Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

Inégalités de Cauchy-Schwarz, de Young, inégalité arithmético-géométrique.

Suites récurrentes

Lors de l'étude d'une suite de nombres réels définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, il est utile de mettre en valeur le rôle des variations de f pour en déduire celles de la suite (u_n). En outre, pour étudier la vitesse de convergence vers a de u_n, on peut exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type $|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$ où $0 \leqslant k < 1$, ou du type $|f(x) - f(a)| \leqslant \lambda|x - a|^2$, $\lambda > 0$.

Intervalle stable par une fonction, point fixe d'une fonction.

Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ converge vers a et si f est continue en a alors a est un point fixe de f.

Exemples d'étude dans le cas où f est monotone ou lipschitzienne.

Méthode de Newton dans des cas simples.

8. Primitives et équations différentielles linéaires

Ce chapitre est consacré au calcul des primitives et à l'étude des équations différentielles linéaires ; le point de vue adopté est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur.

Pour illustrer le cours sur les équations différentielles, on traitera des exemples notamment issus des autres disciplines scientifiques et on étudiera sur quelques exemples le problème de raccordements de solutions.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *soient capables de mener des calculs de primitives dans des cas usuels ;*
- *puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable ;*
- *sachent appliquer les deux points précédents lors de l'étude des équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.*

Les fonctions considérées sont à valeurs réelles ou complexes.

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle.	
Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme.	Les élèves doivent savoir utiliser les primitives de $x \longmapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$. Ils doivent aussi savoir calculer les primitives d'une fonction du type $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$.
Pour une fonction f continue sur I, l'intégrale de a à b, $\int_a^b f(x)dx$, est donnée par $F(b)-F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I. Dérivée de $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ où f est continue.	

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Résultat admis

Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Changement de variable : si φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemples de calculs d'intégrales au moyen d'une intégration par parties ou d'un changement de variables.
Intérêt d'un changement de variable affine pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener au cas où l'intervalle d'intégration est $[0, 1]$ ou $[-1, 1]$.

Équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.

Résolution d'une équation homogène.

Principe de superposition. Forme générale des solutions. Méthode de variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Exemples d'étude dans des cas simples d'équations de type $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, la fonction a pouvant s'annuler en des points de I.

Raccordements de solutions.

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Résolution de l'équation homogène associée	Cas réel et complexe : équation caractéristique, système fondamental de solutions de l'équation homogène.
Principe de superposition.	
Forme générale des solutions.	
Méthode de la variation des constantes (méthode de Lagrange).	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	

9. Développements limités, calcul asymptotique

Ce chapitre est consacré aux développements limités et le calcul asymptotique. Son objectif est de familiariser les élèves avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.

On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison. De même, on expose le calcul des développements limités (somme et produit de fonctions, fonctions composées) à partir d'exemples explicites, en évitant toute présentation systématique.

On insiste sur l'estimation des restes ; pratiquement, on écrira par exemple $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \beta(x)x^4$ *où* β *est une fonction continue en* 0, *plutôt que* $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves
- *connaîssent les développements limités usuels ;*
- *maîtrisent la pratique du calcul asymptotique et ses applications au calcul des limites, à l'étude locale des fonctions et des courbes, etc.*

En revanche, les situations nécessitant des claculs très longs ou d'une grande technicité seront traités à l'aide d'outils logiciels auxquels il convient d'initier les élèves.

Aller à la table des matières

Relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence pour les suites.

Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.

Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^\beta(n)$, n^α, $e^{\gamma n}$.

Liens entre les relations de comparaison.

Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.

Opérations algébriques sur les équivalents. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents.

Développement limité, unicité des coefficients, troncature.

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire.

Forme normalisée d'un développement limité : $f(a+h) = h^p\big(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)\big)$ avec $a_0 \neq 0$.

Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$; signe de f au voisinage de a.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement. Les élèves doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Aller à la table des matières

Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sinh, cosh, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, arctan, et de tan à l'ordre 3.	
Utilisation des développements limités pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.	Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.
Exemples de développements asymptotiques	La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples. La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling.	La démonstration n'est pas exigible.

10. Courbres paramétrées dans le plan $\mathbb{R}^2$

L'étude des courbres paramétrées dans $\mathbb{R}^2$ prolonge celle des fonction réelles de la variable réelle. Elle permet d'illustrer le chapitre « Développements limités, calcul asymptotique ».
Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre les élèves puissent mener, sur des exemples simples, l'étude d'une courbe paramétrée (y compris en coordonnées polaires).
Ce chapitre est étudié notamment pour les besoins des autres disciplines scientifiques enseignées en CPGE.

Courbe paramétrée (ou chemin) de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Chemin fini, simple.	On appelle chemin ou courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ une application γ de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Un tel chemin est dit simple si γ est injective. On définit une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ en considérant ses composantes.

Image $\gamma(I)$ du chemin γ (ou trajectoire du mouvement γ).	
Point régulier, vecteur tangent en un point régulier. Chemin régulier.	
Interprétation cinématique.	Mouvement d'un point mobile dans le plan, vitesse, accélération.
Définition des demi-tangentes en un point $\gamma(t_0)$ de γ, de la tangente en ce point.	
Existence de la tangente en un point où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul, par exemple en un point régulier. Étude locale : allure d'une courbe paramétrée en un point régulier ou singulier. Point birégulier.	Dans cette étude on met en évidence l'utilisation des développements limités et du calcul asymptotique. On décrit les allures possibles d'une courbe en un point régulier ou singulier à partir d'exemples.
Branches infinies.	Recherche des directions asymptotiques, des asymptotes et étude de la position de la courbe par rapport aux asymptotes à partir d'exemples.
Exemples d'étude des courbes paramétrées en coordonnées polaires.	
Équation polaire d'une conique.	

11. Vocabulaire relatif aux structures algébriques

On présente ici les structures algébriques utiles à l'étude du programme. Ce chapitre, strictement limité au vocabulaire décrit ci-dessous, a pour objectif de permettre une présentation unifiée des exemples usuels. En particulier, l'étude de lois artificielles est exclue.

Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif.
Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}_n$.	
Groupe des permutations d'un ensemble E.	Notation S_E.
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Anneau, anneau intègre, corps.	Par convention un anneau est unitaire, un corps est commutatif.
Exemples usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.	
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	

12. Arithmétique des entiers

*L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et celles des congruences ; il développe l'arithmétique des entiers. L'algorithme d'*Euclide *(division euclidienne) y joue un rôle central : il fournis des démonstrations alternatives constructives. Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves sachent l'appliquer à la détermination d'un pgcd ou d'une relation de* Bézout.

Multiples et diviseurs d'un entier relatif, divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Entiers inversibles, relation d'association.	On note $D(a)$ l'ensemble des diviseurs de a.
Théorème de la division euclidienne.	

PGCD de deux entiers non tous deux nuls.	Noté $a \wedge b$, c'est le plus grand élément de $D(a) \cap D(b)$ pour l'ordre naturel de $\mathbb{Z}$. $D(a) \cap D(b) = D(a \wedge b)$.
Algorithme d'Euclide. Relation de Bézout.	L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout.
PPCM.	Notation $a \vee b$. Lien avec le PGCD.
Couple d'entiers premiers entre eux.	Forme irréductible d'un rationnel.
Théorème de Bézout. Lemmes d'Euclide et de Gauss.	Euclide : si a et b divisent c et sont premiers entre eux, alors ab divise c. Gauss : si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.
PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
Nombre premier. Théorème d'Euclide : L'ensemble des nombres premiers est infini. Théorème fondamental de l'arithmétique : existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers. Valuation p-adique, p premier.	Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.	Notation $a \equiv b \quad [n]$.
Opérations sur les congruences : somme, produit.	L'étude des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est hors programme.
Petit théorème de Fermat.	

13. Polynômes

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de base de ces objets formels et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé. Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Comme pour les entiers, l'algorithme d'Euclide (division euclidienne) fournis des démonstrations alternatives constructives ; il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves sachent l'appliquer à la détermination d'un pgcd ou d'une relation de Bézout.

Anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et une indéterminée.	Notation $\mathbb{K}[X]$.
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Le degré du polynôme nul est $-\infty$. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.
Opérations sur les degrés : somme, produit.	$\mathbb{K}[X]$ est intègre.
Composition des polynômes.	Degré et composition.
Multiples et diviseurs d'un polynôme, divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Polynômes inversibles, relation d'association.	On note $D(P)$ l'ensemble des diviseurs de P.
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux polynômes non tous deux nuls.	Noté $P \wedge Q$ c'est le polynôme unitaire de plus grand degré appartenant à $D(P) \cap D(Q)$. On peut, par abus de langage, appeler aussi PGCD de P, Q tout polynôme associé à $P \wedge Q$. $D(P) \cap D(Q) = D(P \wedge Q)$.
Algorithme d'Euclide.	

Relation de BÉZOUT.	L'algorithme d'EUCLIDE fournit une relation de BÉZOUT.
PPCM.	Notation $P \vee Q$. Lien avec le PGCD.
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de BÉZOUT. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
Théorème de BÉZOUT.	
Lemmes d'EUCLIDE et de GAUSS.	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Algorithme de HÖRNER pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	Si $P(a) \neq 0$ a est racine de P de multiplicité 0.
Polynôme scindé. Relations de VIÈTE entre coefficients et racines.	Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines n'est exigible.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.	
Théorème de d'ALEMBERT-GAUSS.	La démonstration est hors programme.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités.
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.

Aller à la table des matières

Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.

Théorème d'interpolation de Lagrange.

Si $x_1, \cdots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \cdots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i : P(x_i) = y_i$. Description des polynômes Q tels que pour tout i : $Q(x_i) = y_i$.

14. Fractions rationnelles

Le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Corps $\mathbb{K}(X)$.

La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle.

Fonction rationnelle.

Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.

Éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Théorème d'existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

La démonstration est hors programme, de même que la division selon les puissances croissantes. On limitera la technicité des exercices.

Décomposition en éléments simples de P'/P.

Deuxième période

Il s'agit de compléter les résultats de la première partie en développant

- l'étude des espaces vectoriels et des applications linéaires ;
- l'utilisation du calcul matriciel en algèbre linéaire ;
- les notions fondamentales relatives aux espaces préhilbertiens ;
- l'étude de l'intégration sur un segment puis sur un intervalle quelconque ;
- l'étude des séries numériques ;
- les notions relatives aux probabilités en se limitant aux variables aléatoires discrètes.

15. Espaces vectoriels

Les deux premiers chapitres de cette partie sont organisés autour des axes suivants :

- *étudier les notions de base relatives aux espaces vectoriels, aux applications linéaires et à l'indépendance linéaire ;*
- *définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire. On insiste sur les méthodes pratiques de calcul de dimension en faisant apparaître qu'elles reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace vectoriel, description d'un sous-espace vectoriel par des équations linéaires ;*
- *présenter un certain nombre de notions de géométrie affine de manière à consolider et enrichir les acquis relatifs à la partie affine de la géométrie classique du plan et de l'espace.*

Lors de cette étude, on fera usage de nombreuses figures et on soulignera comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Il est attendu qu'à l'issue des deux premiers chapitres de cette partie, les élèves

- *aient assimilé les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire, et les procédés usuels de leur construction ;*
- *sachent reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;*
- *connaissent les conséquences du théorème de la base incomplète (définition de la dimension, théorème du rang) ;*

- *maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un probléme (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;*
- *soient capable, au moyen de l'algorithme de Gauss, de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs (base extraite), de compléter une famille libre en une base (base incompléte), d'inverser une matrice carrée ;*
- *maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.*

Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble non vide dans un espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Famille à support fini de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	
Sous-espace vectoriel.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie X.	Notations $\mathrm{Vect}(X)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant X contient $\mathrm{Vect}(X)$.
Familles et parties génératrices, libres, liées. Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	
Somme directe de deux sous-espaces vectoriels ; caractérisation par l'intersection.	
Sous-espaces vectoriels supplémentaires.	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels.	Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.

Un espace vectoriel est dit fini-dimensionnel (ou de dimension finie) s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \ldots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \ldots, n\}$ contenant I telle que $(x_i)_{i \in J}$ soit une base de E. Existence de bases d'un espace vectoriel fini-dimensionnel *non nul*.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.

Utilisation de l'algorithme de Gauss pour extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs et pour compléter une famille libre en une base.

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimensions de K^n, de $K_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.

Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimensions finies. Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n)$.

Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, cas d'égalité.

Sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.

Dimension commune des supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition en somme directe. Dimension.

Caractérisation des sommes directes : si $F_1, \cdots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors : $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.

16. Applications linéaires

On rappelle que le corps $\mathbb{K}$ est ici égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition.

Image et image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Image, noyau d'une application linéaire. Injectivité, surjectivité.

Notations $\operatorname{Im}(u)$, $\operatorname{Ker}(u)$ ou plus simplement $\operatorname{Im} u$, $\operatorname{Ker} u$

Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(\{u(x_i), i \in I\})$. Image d'une base par un isomorphisme.

Rang d'une application linéaire. Invariance par composition par un isomorphisme.

Notation rg(u).

Endomorphismes

Identité, homothéties.

Notation Id_E.

Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$.
Définition géométrique d'une projection ou projecteur, d'une symétrie. Caractérisation par $p^2 = p$ ou $s^2 = \mathrm{Id}_E$.	
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation GL(E).
Détermination d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.	Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Classification, à isomorphisme près, des espaces vectoriels de dimension finie par leur dimension.	
Une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite.	
Expression de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u\|_{E_i} = u_i$ pour tout i.	

Aller à la table des matières

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Théorème du rang : si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u).$$

Forme linéaire.

Formes coordonnées relativement à une base.

Hyperplan.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.

En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous espaces de dimension $n-1$.

Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.

Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

L'étude de la dualité est hors programme.

17. Espace affine de dimension finie sur $\mathbb{R}$

Cette partie du cours doit être illustrée par de nombreuses figures.

Présentation informelle de la notion d'espace affine associé à un espace vectoriel réel : points et vecteurs.	On se limite à la dimension finie. L'écriture $B = A + \vec{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
Translation.	
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine. Intersection de sous-espaces affines.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$
Barycentres. Famille affinement indépendante de points, repère affine, coordonnées.	Insister sur le cas de dimension 1, 2 et 3.
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ d'inconnue x est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 et la recherche de polynômes interpolateurs. La notion d'application affine est hors programme.

18. Matrices

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- *introduire les matrices et le calcul matriciel ;*
- *présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;*
- *étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;*
- *introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;*
- *étudier l'aspect matriciel des opérations élémentaires introduites dans le chapitre sur les systèmes linéaires.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *sachent représenter matriciellement une famille finie de vecteurs ou de formes linéaires et une application linéaire dans une base donnée et utiliser les formules de changement de bases ;*
- *maîtrisent le passage de l'expression géométrique d'un probléme (en termes d'applications linéaires, de sous-espaces vectoriels, etc.) à son expression algébrique (en termes d'équations linéaires, de matrices, etc.) et vice versa ;*
- *soient capables, au moyen de l'algorithme de Gauss, de déterminer un rang, d'extraire une sous-famille libre maximale d'une famille de vecteurs (base extraite), de compléter une famille libre en une base (base incompléte), d'inverser une matrice carrée ;*
- *maîtrisent le « théorème du rang » dans différentes formulations.*

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices àn lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Bilinéarité, associativité du produit matriciel.	
Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; produit de deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.
Formule du binôme de Newton.	Application au calcul de puissances.
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: matrice inversible, inverse, groupe linéaire ; produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures/inférieures.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Transposée d'une matrice. Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit, inverse.	Notations ${}^tA$, A^T.
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base e, d'une application linéaire dans un couple (e, f) de bases. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Notation $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$. Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Cas particulier des endomorphismes.	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul.
Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieures/inférieures est une matrice triangulaire supérieures/inférieures.	
Matrice par blocs.	Interprétation géométrique.
Théorème du produit par blocs.	La démonstration n'est pas exigible.
Matrice de passage d'une base à une autre.	La matrice de passage $P_e^{e'}$ de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e. Inversibilité et inverse de $P_e^{e'}$.
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.	
Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement, et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r alors il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = J_r$.	$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, I_r étant la matrice unité d'ordre r.
Matrices équivalentes.	Interprétation géométrique.

Une matrice élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique.
Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, relation $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, invariance par similitude.	Notations $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A)$.
Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ; linéarité, relation $\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$. Trace d'un projecteur.	Notations $\mathrm{Tr}(u)$, $\mathrm{tr}(u)$.
Opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice ; matrices élémentaires.	Interprétation en termes de produit matriciel.
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	
Matrice échelonnée par lignes, pivot.	$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}\mathbb{K}$ est échelonnée par lignes quand il existe un entier $k \in [\![1, n]\!]$ et une application strictement croissante $\varphi : [\![1, k]\!] \longmapsto [\![1, p]\!]$ tels que $(j < \varphi(i)$ ou $i > k)$ implique $a_{i,j} = 0$. Dans une matrice échelonnée par lignes, chaque premier terme non nul d'une ligne est appelé pivot.

Matrice échelonnée réduite par lignes.	Une matrice est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si elle est échelonnée par lignes et dont les pivots sont tous égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.
Formulation matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan : pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une matrice échelonnée réduite par lignes $E \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, uniquement déterminée, et une suite finie de matrices élémentaires $P_1, \dots, P_N$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $E = P_N \cdots P_1 M$.	Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices. On limitera la technicité des exercices.
Écriture matricielle d'un système linéaire.	Interprétation géométrique : intersection d'hyperplans affines.
Système homogène associé. Rang, dimension de l'espace vectoriel des solutions.	Une autre formulation du théorème du rang : le rang d'un système d'équations linéaires homogènes est égal au rang de sa matrice, une matrice et sa transposée ont même rang, l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes à p inconnues de rang r est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - r$.
Compatibilité d'un système linéaire. Structure affine de l'espace des solutions.	Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; le système carré $Ax = b$ d'inconnue x possède une et une seule solution si et seulement si A est inversible si et seulement si sa matrice échelonnée réduite par lignes est I_n. Système de Cramer.	

19. Groupe symétrique et déterminants

Dans ce chapitre, le groupe symétrique est introduit exclusivement en vue de l'étude des déterminants ; les objectifs qui y sont visés sont les suivants :

- *introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;*
- *établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;*
- *indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.*

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *puissent manipuler les permutations et calculer leur signature ;*
- *connaissent la théorie des déterminants et acquièrent des méthodes pour les calculer.*

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.	Notation S_n.
Cycle, transposition.	Notation $(a_1\, a_2 \ldots a_p)$.
Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité. Méthode pratique de décomposition.	La démonstration n'est pas exigible. Commutativité de la décomposition.
Toute permutation se décompose en produit de transpositions.	La décomposition n'est pas unique mais la parité du nombre de transpositions l'est. La démonstration n'est pas exigible.
Signature, signature d'un cycle ; pratique de calcul de la signature.	Il existe une unique application $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$ telle que $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ et $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour tout $(\sigma, \sigma') \in S_n^2$.
Formes n-linéaires alternées	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures.

Antisymétrie, effet d'une permutation.	Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1,\dots,x_n)=0$.
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base : si e est une base, il existe une et une seule forme n linéaire alternée f pour laquelle $f(e)=1$. Toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_e$; relation entre $\det_e$ et $\det_{e'}$.	Notation $\det_e$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible.
Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées (formule de Leibniz).	Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
La famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1,\dots,x_n)\neq 0$. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	
Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée.	Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant d'un produit, d'une transposée.	Relation $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles.
Calcul des déterminants : effet des opérations élémentaires ; cofacteur ; développement par rapport à une ligne ou une colonne.	
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde. Comatrice.	Notations $\mathrm{Com}(A)$, $\widetilde{A}={}^t\mathrm{Com}(A)$.
Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A)={}^t\mathrm{Com}(A)A=\det(A)I_n$	Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

20. Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- *généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension 2 ou 3 pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait ;*
- *approfondir l'étude de la géométrie euclidienne du plan, notamment à travers l'étude des isométries vectorielles.*

Lors de cette étude, on fera usage de nombreuses figures et on soulignera comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions ètudiées, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *acquièrent les notions de base sur le produit scalaire, sur les espaces vectoriels euclidiens (bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et sur la géométrie euclidienne du plan (distances, angles, isométries, déplacements, similitudes directes) ;*
- *sachent orthogonaliser une famille libre d'un espace euclidien au moyen de l'algorithme de* Gram-Schmidt *et calculer la distance entre deux sous-espaces affines ;*
- *maîtrisent les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et automorphismes orthogonaux, points et isométries) et le point de vue matriciel.*

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

Produit scalaire sur E.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x.y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f,g) \mapsto (f\|g) = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, produit scalaire $(f,g) \mapsto (f\|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fg$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.	

Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Notation $\| \ \|$.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Relations entre produit scalaire et norme ; identités de polarisation ; identité du parallélogramme.	$2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace vectoriel.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.	
Théorème de Pythagore, cas d'une famille finie de vecteurs. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète.	
Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	
Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n, déterminant de n vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\mathrm{Det}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ou $[x_1, x_2, \dots, x_n]$; produit mixte de n vecteurs, produit vectoriel de $n-1$ vecteurs.	Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.
Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, notations $u \wedge v$ ou $u \times v$; expression des coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.	

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V.	Notation $d(x, V)$.
Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\vec{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance d'un point M à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\vec{n}$: $\lvert\overrightarrow{AM}.\vec{n}\rvert$.	Cas particuliers du plan et de l'espace euclidiens.
Isométries vectorielles d'un espace euclidien. Automorphisme orthogonal. Définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une (de toute) base orthonormale. Symétrie orthogonale, réflexion.	
Groupe orthogonal.	Notation $O(E)$.
Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	
Groupe orthogonal.	Notations $O_n(\mathbb{R})$, $O(n)$.

Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale : caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale ; changement de base orthonormale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie ; déterminant d'une réflexion. Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive (rotation), négative. Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormale directe.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}(E)$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Isométries vectorielles en dimension 2 : dans un plan euclidien E, tout automorphisme orthogonal est soit une réflexion, soit le produit de deux réflexions ; décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.	Le groupe $\mathrm{SO}(E)$ est commutatif.
Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.	Lien entre les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.
Dans un plan euclidien orienté, mesure θ (définie modulo 2π) de l'angle orienté de deux vecteurs a et b non nuls ; relations $\langle a, b\rangle = \|a\|\,\|b\|\cos\theta$ et $\mathrm{Det}(a, b) = \|a\|\,\|b\|\sin\theta$.	On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation ; matrice de rotation $R(\theta)$ associée à un nombre réel θ.	Application canonique $\theta \mapsto R(\theta)$ de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{SO}(2)$.

21. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment

Dans ce chapitre, Il s'agit ici de donner une construction rigourose de l'intégrale d'une fonction, rélles ou complexes, continue par morceaux sur un segment en partant de sa définition comme une aire. Ses propriétés élémentaires sont établies, et notamment le lien entre intégration et primitivation. Ce chapitre permet aussi de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral.

La notion de continuité uniforme étant hors programme de MPSI, le théorème sur l'approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier est établi en ayant recourt à l'axiome de la borne supérieure.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *soient capables de mener des calculs d'intégrales et de primitives dans des cas usuels ;*
- *puissent mettre en pratique, sur des exemples simples, les techniques d'intégration par parties et de changement de variable ;*
- *aient une connaissance à la fois théorique et pratique des principales inégalités (inégalités des accroissements finis et de TAYLOR-LAGRANGE, inégalité triangulaire, etc.).*

Subdivision d'un segment, pas de la subdivision.

Fonction en escalier, continue par morceaux, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$.

Approximation d'une fonction continue par morceaux sur un segment par une fonction en escalier : si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est une fonction continue par morceaux alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\phi : [a, b] \to \mathbb{K}$ telle que $|f(t) - \phi(t)| < \varepsilon$ quel que soit $t \in [a, b]$.

On peut montrer cette propriété (équivalente au théorème de HEINE, hors programme de première année) en appliquant le principe de la borne supérieure (ou celui des segments emboîtés) et le fait qu'une telle fonction possède une limite à droite en tout point de $[a, b[$, et à gauche en tout point de $]a, b]$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on parvient ainsi à construire un couple de fonctions en escalier qui encadrent f à ε près sur le segment. Une représentation graphique des fonctions est éclairante, en vue notamment de l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire.

Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Propriétés usuelles : linéarité, additivité et positivité de l'intégrale.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,dt$.

Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,dt$.

Linéarité, additivité et positivité de l'intégrale. L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si, et seulement si, la fonction est nulle.

Relation de Chasles. Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,dt$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.

Sommes de Riemann : si f est une fonction continue par morceaux sur le segment [a,b] à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Intérprétation géométrique. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Inégalité triangulaire.

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|$$

Dérivation de $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ pour f continue.

Théorème fondamental du calcul intégral.	f étant une fonction continue sur I et $a \in I$, la fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I. C'est l'unique primitive de f qui s'annule en a. De plus pour toute primitive G de f sur I $$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,dt$$
Définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.	f est continue par morceaux sur I si et seulement sa restriction sur tout segment de I est continue par morceaux.
Définition des primitives d'une fonction continue par morceaux. Deux primitives d'une fonction continue par morceaux sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.	
Extension du théorème fondamental du calcul intégral aux fonctions continues par morceaux.	
Inégalité des accroissements finis.	Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors $$\lvert f(b) - f(a)\rvert \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} \lvert f'\rvert$$
Formule d'intégration par parties.	La formule d'intégration par partie pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ étant déjà traitée, sa généralisation au cas des fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux pourra être abordée en exercices.
Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor (à l'ordre n) avec reste sous forme d'intégrale ; inégalité de Taylor-Lagrange.	On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Exemples de calcul d'intégrales et de primitives, et d'emploi des formules d'intégration par partie et de changement de variable.

Pour ce qui est du calcul des primitives, le seul exposé systèmatique concerne les fonctions rationnelles ; il utilise la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

Parmi les exemples à traiter figurent la primitivation des polynômes trigonométriques par linéarisation, l'utilisation du paramétrage rationnel de $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ pour ramener l'intégrale d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus à celle d'une fonction rationnelle et le calcul des intégrales de Wallis.

Intégration numérique : étude et comparaison des méthodes des rectangles et des trapèzes.

On présentera un algorithme associé à la méthode des trapèzes en soulignant l'intérêt des subdivisions dichotomiques ; on admettra que pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, l'erreur est un $O(1/n^2)$, n désignant le nombre de points de la subdivision.

22. Intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle

L'objectif de ce chapitre est de définir, dans le cadre restreint des fonctions continues par morceaux, la notion d'intégrabilité sur un intervalle quelconque. On soulignera l'importance du principe de comparaison pour ramener l'étude de l'intégrabilité d'une fonction à l'estimation de son comportement aux bornes de l'intervalle d'intégration.

Il est attendu qu'à l'issue de ce chapitre, les élèves

- *sachent établir la convergence ou la divergence d'une intégrale dans des cas standard et en particulier soient capables de comparer une fonction positive aux fonctions de référence ;*

– *aient mis en œuvre les techniques d'intégration usuelles pour étudier ou calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque.*

Définition d'une intégrale (« impropre ») convergente.	Soit I un intervalle dont les extrémiés inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement, $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et F une primitive de f sur I ; on dit que f admet une intégrale convergente sur I si F admet des limites finies en a et en b, auquel cas on pose $\int_a^b f = \lim_b F - \lim_a F$. Si par exemple $I = [a, b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty]$, f admet une intégrale convergente si et seulement si la limite $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f$ existe et est finie ; dans ce cas cette limite est la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$. Notations $\int_I f$, $\int_a^b f(t)\,dt$
Cas des fonctions positives.	Si la fonction f est à valeurs réelles positives, elle admet une intégrale convergente sur I si, et seulement si, la fonction F est majorée sur I, ce qui revient à dire que l'ensemble des intégrales de f sur un segment contenu dans I est majoré ; dans ce cas la borne supérieure de cet ensemble est égale à l'intégrale $\int_a^b f$.

Dans le cas où f est à valeurs réelles positives et n'admet pas d'intégrale convergente sur I, il est pratique d'écrire $\int_a^b f = +\infty$.

Fonction intégrable sur un intervalle.

La fonction f intégrable sur I si $\int_I |f|$ converge.

Si une intégrale est absolument convergente, elle est convergente.

Principe de comparaison pour les fonctions positives.

Encadrement, domination, négligeabilité et équivalence.

Étude de l'intégrabilité sur $]0,1]$ ou sur $[1,+\infty[$ des fonctions de référence usuelles : $x \mapsto e^{\lambda x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $x \mapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $x \mapsto |\ln x|$.

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ sur $[a, b[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Comparaison de l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\,dt$ et de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante.

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité de l'application $f \longmapsto \int_I f$, définie sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont l'intégrale converge. Positivité dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Relation de CHASLES.

f est intégrable sur I si et seulement si, pour tout $c \in I$, f est intégrable sur $I \cap [c, +\infty[$ et sur $I \cap]-\infty, c]$ et dans ce cas

$$\int_I f = \int_{I \cap]-\infty, c]} f + \int_{I \cap [c, +\infty[} f$$

Espace des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$. Inégalité triangulaire.	$\left\lvert\int_I f\right\rvert \leqslant \int_I \lvert f\rvert$
Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Fonctions complexes de carré intégrable ; inégalité de Cauchy-Schwarz.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque.	L'existence de deux des trois termes apparaissant dans la formule justifie le calcul. Notation $[F]_a^b$. On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule d'intégration par parties pour ramener l'étude de la convergence d'une l'intégrale à celle d'une intégrale absolument convergente.
Formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque : étant données une fonction f continue sur un intervalle I et une fonction φ bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle I' sur l'intervalle I, les intégrales $\int_I f$ et $\int_{I'} (f \circ \varphi)\,\lvert\varphi'\rvert$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.	Les élèves peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changement de variable simples (fonctions affine, puissance, exponentielle, logarithme).
Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.

23. Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Développements limités, calcul asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels.

Ce chapitre est étudié notamment pour son intérêt dans l'étude des variables *aléatoires discrètes ; son objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.*

Sommes partielles. Convergence, divergence.	$\sum_k u_k$ désigne la série de terme général u_k, on dit aussi série associée à la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les u_k sont dans toute cette section éléments de $\mathbb{C}$.
Somme et restes d'une série convergente.	On note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la somme de la série de terme général u_k, lorsqu'elle converge.
Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.	Exemples de séries simples à étudier, cas des séries géométriques, cas de télescopage.
Espace vectoriel des séries convergentes ; linéarité de la somme.	
Lien suite-série.	La suite $(u_n)_n$ et la série $\sum_k (u_k - u_{k+1})$ sont de même nature.
Une série à termes réels positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.	Dans le cas où une série à termes positifs est divergente, il est pratique de convenir que sa somme est égale à $+\infty$.
Si la série à termes réels positifs u_k converge alors la série associée à une permutation quelconque de la suite (u_k) converge aussi, et les sommes sont égales.	La suite v est une permutation de la suite u s'il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\sigma(n)}$, pour tout entier naturel n.
Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : comparaison terme à terme, comparaison logarithmique, règle de d'Alembert, cas de domination, cas d'équivalence.	

Dans le cas d'une fonction f monotone sur $\mathbb{R}^+$, encadrement des sommes partielles de la série $\sum_k f(k)$ à l'aide d'intégrales. Comparaison de l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ et de la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ pour une fonction $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et décroissante. Exemples classiques, séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Séries alternées, critère spécial de Leibniz ; signe et majoration des restes en cas de convergence.	Les sommes partielles d'indices pairs et celles d'indices impairs forment un couple de suites adjacentes.
Convergence absolue d'une série.	On considère sur quelques exemples l'utilisation de la formule de sommation par parties $(a_0-a_1)b_1+(a_1-a_2)b_2+\cdots+(a_{n-1}-a_n)b_n = a_0b_1 - a_1(b_1-b_2) - a_2(b_2-b_3) - \cdots - a_{n-1}(b_{n-1}-b_n) - a_nb_n$ pour ramener l'étude d'une série semi-convergente à celle d'une série absolument convergente.
La convergence absolue d'une série $\sum_k u_k$ implique sa convergence, la réciproque est fausse. Inégalité triangulaire.	Le critère de Cauchy est hors programme. La convergence de $\sum_k u_k$ est établie à partir de la convergence des 4 séries à termes positifs suivantes : $\sum_k \mathrm{Re}(u_k)^+$, $\sum_k \mathrm{Re}(u_k)^-$, $\sum_k \mathrm{Im}(u_k)^+$, $\sum_k \mathrm{Im}(u_k)^-$ où l'on a posé $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

	Remarquer qu'une permutation des u_k ne modifie pas la propriété de convergence absolue, ni la somme d'une série absolument convergente. La sommabilité ne figure pas au programme de première année.
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.
Développement décimal d'un nombre réel. Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.	Pour tout réel x strictement positif, il existe une suite (a_n) à valeurs dans $\{0, 1, \dots, 9\}$ telle que $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$, où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x ; la suite des décimales (a_n) est uniquement déterminée si x n'est pas décimal. Développement décimal propre d'un nombre décimal.
Exemple de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.	Pour trouver une valeur approchée de la somme d'une série convergente, il peut être utile d'encadrer son reste ; pour cela, on pourra exploiter la comparaison d'une série à une intégrale, le résultat concernant le reste d'une série alternée, etc.

24. Dénombrement

Dans ce chapitre, Il s'agit d'une brève initiation aux techniques élémentaires de la combinatoire ; l'objectif est de consolider les acquis du secondaire. On introduit sans formalisation excessive la notion de cardinal et on peut admettre sans démonstration les propriétés les plus intuitives. Pour la dénombrabilité, on se limite à la définition et quelques exemples.

L'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$, $\#A$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles finis.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstrations combinatoires des formules de Pascal et du binôme.
Ensembles dénombrables, au plus dénombrables.	Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou dénombrable.	

Exemples simples.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

25. Espaces Probabilisés

Ce chapitre et le suivant ont pour objectif d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes ; ils s'appuient sur le chapitre consacré au dénombrement et celui consacré aux séries numériques. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé à minima ; en particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.*

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des élèves.

Cette partie du programme relative aux probabiliés a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Elle se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.

La notation Ω est traditionnelle.

Tribu T sur un univers Ω.

Événement, événement contraire, événement « A et B », événement « A ou B », événements incompatibles, système complet d'événements.

Exemples simples modélisant des situations concrètes où le hasard intervient.

Une probabilité sur (Ω, T) est une application P de T dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant (1) $P(\Omega) = 1$, (2) pour A et B incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ et (3) pour $(A_n)_n$ croissante au sens de l'inclusion $\lim_n P(A_n) = P(\cup_n A_n)$. On parle d'espace probabilisé (Ω, T, P).

Exemple simple : pour $\Omega = [[1, n]]$ une probabilité P est déterminée par la liste $P(\{k\})$, $k \in [[1, n]]$. Exemple plus subtil : si E est un sous-ensemble simple de $\mathbb{R}^2$ d'aire unité il existe (on l'admet) une probabilité sur E, T vérifiant $P([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$ pour tout $[a, b] \times [c, d] \subset E$. La tribu T est ici la plus petite tribu qui contient comme éléments tous les $[a, b] \times [c, d]$ inclus dans E.

Propriétés des probabilités : probabilité de la réunion de plusieurs événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.

Probabilités conditionnelles.

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $P_B(A) = P(A \cap B)/P(B)$, notée aussi $P(A|B)$.

L'application P_B est une probabilité.

Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes : si $A_1, \cdots, A_k$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors

$$P_B(A_j) = \frac{P_{A_j}(B)P(A_j)}{\sum_i P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

Proposer applications issues de la vie courante.

Couple d'événements indépendants.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et$B$ s'écrit $P_B(A) = P(A)$.

Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

L'indépendance des A_i deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

26. Variables aléatoires discrètes

Une application X définie sur l'univers Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que pour $I_1, \ldots, I_k$ intervalles de $\mathbb{R}$ l'image réciproque $X^{-1}(I_1 \times \cdots \times I_k)$ est élément de la tribu T est une variable aléatoire.

On utilise souvent $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ à la place de $X^{-1}(A)$. On écrit donc $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$.

On se limite ici au cas $D = X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. (on parle de variable discrète).

La condition devient $(X = x) \in T$ pour tout $x \in D$.

Loi P_X de la variable aléatoire X : c'est la probabilité sur $(D, \mathcal{P}(D))$ définie par $P_X(A) = P(X \in A)$.

L'application P_X est déterminée par la donnée des $P(X = x)$ pour x élément de D.

Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.

Loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0, 1]$.

Notation $\mathcal{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.

Loi binomiale de paramètres n, p, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes.

Loi géométrique, loi de Poisson.

Donner des exemples concrets de situation où ces lois sont utilisées.

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.

La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes : $P((X,Y)\in A\times B) = P(X\in A)P(Y\in B)$ Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Si $X_1,\cdots,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.
Si X et Y sont indépendantes les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	
Espérance d'une variable aléatoire réelle.	On écrit $D=\{x_k,\ k\in[[1,n]]\}$ si D est fini, $D=\{x_k,\ k\in\mathbb{N}^*\}$ si D est dénombrable. L'indexation $k\mapsto x_k$ est supposée injective et on pose $p_k=P(X=x_k)$. L'espérance $E(X)$ est la somme de la série $\sum_k p_k x_k$ en exigeant dans le cas dénombrable la convergence absolue de la série.
Relation $E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$ dans le cas Ω fini ou dénombrable. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante, de BERNOULLI, binomiale.	
Formule de transfert : $E(f(X))=\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Inégalité de MARKOV. Si X et Y sont indépendantes : $E(XY)=E(X)E(Y)$.	La réciproque est fausse en général.
Moments.	Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$.

Aller à la table des matières

Variance, écart type.	La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion. Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1.
Relation $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Relation $V(aX + b) = a^2V(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $(X - E(X))/\sigma(X)$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.	Application à la variance d'une variable aléatoire binomiale.

Table des matières

Préambule

Première période

Deuxième période

Aller à la table des matières