ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الجهوي لمهن التربية والتكوين

جهة الرباط - سلا - زمور زعير

Concours d'accès au cycle de préparation à l'agrégation de Mathématiques

Session Juillet 2015

Épreuve d'Analyse et Probabilité

Durée 4 heures

Le sujet comporte 5 pages, en plus de cette page de garde.

Important

L'épreuve est constituée de trois exercices et d'un problème. Le candidat est libre de traiter le sujet dans l'ordre qui lui convient à condition de bien mentionner les références complètes de chaque question traitée.

Les candidats sont tenus à rendre deux copies séparées même si elles sont vierges. La première contenant la résolution des trois exercices et la seconde contenant celle du problème. Dans chacune des deux copies on indiquera les références du candidat et le nombre d'intercalaires utilisés.

Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la rigueur de votre raisonnement, de la clarté de la rédaction et du soin apporté à la présentation de votre copie. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, il veillera toutefois à mentionner la référence du résultat utilisé.

Si le candidat repère ce qu'il pense être une erreur de l'énoncé, il le signale sur sa copie en expliquant les raisons qui l'ont amené à le penser. Ceci ne doit pas l'empêcher de finir son épreuve et il a le choix d'adopter les rectifications qu'il croit nécessaires ou pas.

Les calculatrices et tout matériel électronique ainsi que les documents sont interdits lors de cette épreuve.

✧ ✧ ✧ ✧

PROBLÈME

Objectif du problème : Le problème a pour objectif la démonstration, de deux façons différentes, du théorème d'approximation de *Weierstrass* suivant :

Toute fonctions réelle continue sur un segment $[a,b]$*, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales sur* $[a,b]$.

Dans toute la suite, w désignera un réel **strictement positif**.

Préliminaires

Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur $[-w,w]$, f une fonction définie et continue sur un segment $[a-w,b+w]$, où $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$, et posons

$$f_n(x)=\int_{-w}^{w} f(t+x)D_n(t)\mathrm{d}t,$$

pour tout $x\in[a,b]$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$.

On suppose que (D_n) vérifie l'hypothèse $(\mathscr{H})$, suivante :

$$\left.\begin{array}{l}
\text{i/ } \forall t\in[-w,w],\ \ D_n(-t)=D_n(t),\\
\text{ii/ } \forall t\in[-w,w],\ \ D_n(t)\geq 0,\\
\text{iii/ Pour tout } \delta\in]0,w[, (D_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } [-w,-\delta]\cup[\delta,w],\\
\text{iv/ } \displaystyle\int_{-w}^{w} D_n(t)\mathrm{d}t=1.
\end{array}\right\}\qquad (\mathscr{H})$$

1. Justifier pourquoi f est bornée et uniformément continue sur $[a-w,b+w]$.
   On désignera par M un majorant de $|f|$ sur $[a-w,b+w]$.
2. Montrer que les f_n sont bien définies et continues sur $[a,b]$.
3. Montrer que pour tous $x\in[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$ et $\delta\in]0,w[$ on a :

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\int_{-\delta}^{\delta}|f(t+x)-f(x)|D_n(t)\mathrm{d}t+4M\int_{\delta}^{w}D_n(t)\mathrm{d}t.$$

4. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Une première preuve du théorème de *Weierstrass*

5. Démontrer que :

$$\forall t\in[0,1],\forall n\in\mathbb{N},\ \ (1-t)^n\geq 1-nt.$$

6. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[-w,w]$:

$$p_n(t)=\left(1-\frac{t^2}{w^2}\right)^n.$$

   a. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (p_n).

   b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-w}^{w}p_n(t)\mathrm{d}t$.

   c. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, l'inégalité :

$$\int_{-w}^{w}p_n(t)\mathrm{d}t\geq\frac{4w}{3\sqrt{n}}.$$

   (ind. On pourra minorer par une intégrale sur $[\frac{-w}{\sqrt{n}},\frac{w}{\sqrt{n}}]$, puis utiliser la question 5).

   d. Justifier l'existence d'un réel c_n tel que $\displaystyle\int_{-w}^{w}c_np_n(t)\mathrm{d}t=1$, et montrer que $0<c_n\leq\dfrac{3\sqrt{n}}{4w}$.

   e. On pose $P_n=c_np_n$. Montrer que pour tout $\delta\in]0,w[$, la suite (P_n) converge uniformément vers 0 sur $[-w,-\delta]\cup[\delta,w]$.

   f. Conclure que P_n vérifie l'hypothèse $(\mathscr{H})$.

7. Soit g une fonction continue sur un segment non trivial $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.
Prenons $w = 2(b-a)$ et prolongeons g à $[a-w, b+w]$ en une fonction f définie par :

— $f(x) = g(x)$ si $x \in [a,b]$,

— $f(x) = 0$ si $x \in [a-w, a-\frac{w}{2}] \cup [b+\frac{w}{2}, b+w]$ et

— f affine sur $[a-\frac{w}{2}, a]$ et sur $[b, b+\frac{w}{2}]$.

Pour tout $x \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$f_n(x) = \int_{-w}^{w} f(t+x)P_n(t)\mathrm{d}t.$$

a. Montrer à l'aide d'un changement de variable, que pour tout $x \in [a,b]$,

$$f_n(x) = \int_{a-\frac{w}{2}}^{b+\frac{w}{2}} f(s)P_n(s-x)\mathrm{d}s,$$

et en déduire que f_n est un polynôme.

b. Déduire le théorème d'approximation de *Weierstrass.*

Une deuxième preuve du théorème de *Weierstrass*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n un entier strictement positif, et $x \in [0,1]$.

On note $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre x.

On note également : $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$; $Z_n = \frac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = E(f(Z_n))$.

8. Rappeler sans démonstration, la loi de S_n, en déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

9. Expliciter l'expression de $B_n(f)(x)$.

10. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{\substack{0 \le k \le n \\ |\frac{k}{n} - x| \ge \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

11. En déduire que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. (ind. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de Heine).

12. Déduire le théorème d'approximation de *Weierstrass.*

La suite de l'épreuve est à rédiger séparément !

Exercice 1

Soit x un nombre réel, on rappelle que s'il existe un nombre entier p qui vérifie $|p-x| < \frac{1}{2}$ alors p est l'entier le plus proche de x. On rappelle aussi que : $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

On définit la suite (β_n) par $\beta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

13. Expliciter $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n$ en fonction de n, pour tout entier n de $\mathbb{N}$.

14. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n est un entier naturel.

On définit la suite (ρ_n) par $\rho_n = e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$.

15. Préciser le signe de ρ_n en fonction de l'entier naturel n.

16. Établir, pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

17. Déduire de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geq 1$, β_n est l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$.

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]-1,1[$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

18. Montrer que pour tout entier naturel n, $\beta_n = f^{(n)}(0)$.

Pour $n \geq 1$, on note :

— $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des applications bijectives de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

— γ_n le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_n$ sans point fixe (τ appartenant à $\mathscr{S}_n$ est sans point fixe si pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a $\tau(k) \neq k$).

Pour $n = 0$ on adopte la convention : $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_1 = 0$.

19. Rappeler sans justification le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_n$.

20. Si $0 \leq k \leq n$, combien d'éléments de $\mathscr{S}_n$ ont exactement k points fixes ?

21. Établir pour tout entier naturel n la relation : $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \gamma_k = n!$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ lorsque la série converge.

22. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1.

23. Calculer $e^x g(x)$ pour $x \in]-1,1[$, puis montrer que pour tout x de $]-1,1[$, $f(x) = g(x)$.

24. Comparer les deux suites (β_n) et (γ_n) et en déduire la valeur de γ_8.

Exercice 2

On considère les fonctions g et h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t \text{ et } h(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

25. Montrer que les fonctions g et h admettent des limites finies, notées I_1 et I_2 respectivement, lorsque x tend vers $+\infty$.

26. **a.** Montrer que la fonction $H : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

b. Déduire une relation entre les fonctions H et $G : x \mapsto \int_0^x e^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$.

27. **a.** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^2 e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 e^{\mathrm{i}x^2t^2}\,\mathrm{d}t$ et, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

28. En déduire que : $I_1 = I_2$ et, donner la valeur de $|I_1|$.

Exercice 3

On désigne par L l'espace vectoriel réel des fonctions $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $\sup\limits_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y|}\right|$ existe et finie. On note : $\sup\limits_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\neq y}} \left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y|}\right| = k(g)$.

29. Justifier que les applications g de L sont bornées sur $[0,1]$.

30. Montrer que si une fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, alors $g \in L$ et, que $k(g) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g'(x)|$.

31. Montrer que l'application $N : g \mapsto k(g) + \|g\|_\infty$ est une norme sur L.

32. Montrer que l'application identité est continue de (L, N) dans $(L, \|.\|_\infty)$.

33. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \text{ si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $f_n \in L$ et calculer $N(f_n)$.

b. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge dans (L, N).

c. Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont elle des normes équivalentes ?

34. Montrer que la boule fermée $B'(0,2) = \{g \in L\,;\ N(g) \leqslant 2\}$ n'est pas compacte.