Université My Ismail, Meknes

Faculté des Sciences

Habilitation à Diriger des Recherches

En Mathématiques

Soutenue publiquement le : 18 Décembre 2015

Par Dr. My Ismail Mamouni

CRMEF Rabat

Devant le Jury:

Président: Youssef Rami (PES), Faculté des Sciences, Meknes

Examinateurs: Hamid Abchir (PES), Ecole Supérieure de Technologie, Casablanca

Jilali Assim (PES), Faculté des Sciences, Meknes

Mohamed Rachid Hillai (PES), Faculté des Sciences Ain Chock, Casablanca

Année Universitaire:, 2015-2016

À ma femme Lamya

Un jour, nos chemins se sont croisés
Et depuis on ne s'est plus jamais quittés.
Tu es une des plus belles choses qui me soit arrivé
Je sais que sans toi j'aurai déjà cessé d'exister.

Je ne te remercierai jamais assez,
D'être présente dans ma vie, d'en être un pilier
Sans toi ma forteresse se serait déjà écroulée,
Sans toi, j'aurai fini par renoncer.

Remerciements

Soyons reconnaissants aux personnes qui nous donnent
du bonheur; elles sont les charmants jardiniers
par qui nos âmes sont fleuries.
Marcel Proust

Le seul moyen de se délivrer d'une tentation, c'est d'y céder paraît-il! Alors j'y cède en disant en grand Merci aux personnes qui ont cru en moi et qui m'ont permis d'arriver au bout de mes recherches. Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener ma recherche à son terme actuel.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement les professeurs Mohamed Rachid Hilali de la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca et Youssef Rami de la faculté des sciences de Meknes, pour toute leur aide et assistance inlassable depuis 2011, date où on a commencé à collaborer et coordonner avant d'arriver à structurer ensemble un groupe de recherche réputé. Je suis ravi d'avoir travaillé leur compagnie pendant ces 4 ans, car outre leur appui scientifique, il ont toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de mes travaux de recherche. Leurs compétence, rigueur et clairvoyance scientifique m'ont beaucoup appris. Ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de chercheur.

Je tiens à remercier le Professeur Youssef Rami pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance. Je remercie également les Professeurs Hamid Abchir, Jilali Assim et Mohamed Rachid Hillai pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'en être membres.

J'adresse toute ma gratitude à toutes les personnes qui m'ont aidé le long de ces années à l'aboutissement de mes travaux. Les nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec chacun m'ont beaucoup apporté. Merci donc à Fred Cohen (Rocherster, USA), à Mark

Grant (Aberedeen, Scotland), à John McCleary (Vassar College, USA), à Aniceto Murillo (Malaga, Espagne), à Samuel Bruce Smith (Saint Joseph Univ., Philadelphie, USA), à Jim Stasheff (North Carolina, USA), à Jean Claude Thomas (Angers, France) et à tous ceux qui peuvent se reconnaître.

Je remercie toutes les membres de mon groupe de recherche avec qui j'ai partagé ces dernières années, notamment les professeurs qui m'ont entouré et m'ont conseillé, ainsi que tous les doctorants et étudiants de Master pour m'avoir toujours supporté, même si ce n'est pas encore fini. Ils m'ont beaucoup aidé et sont devenus des amis à qui je souhaite tout le courage qu'ils m'ont apporté.

Durant ces années j'ai participé et organisé de nombreuses activités et je remercie par l'occasion toutes les personnes physiques ou morales pour leur aide et soutien et pour avoir fait en sorte que mon potentiel de chercheur en profite pour se développer de plus en plus.

Mes remerciements vont aussi à ma famille (mes parents, mes sœurs et leurs petites familles), à mes amis pour tous leurs encouragements.

Enfin, je remercie mes premiers fans et supporters : mes enfants Wassim (2004) et Naim (2008). Leur présence, leurs éclats de joie et les beaux moments de folie qu'on passe ensemble sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais.

Ces remerciements ne peuvent s'achever, sans une pensée pour ma chère épouse Lamya pour son soutien quotidien indéfectible et son enthousiasme contagieux à l'égard de mes travaux comme de la vie en général. Notre couple a grandi en même temps que mon projet scientifique, le premier servant de socle solide à l'épanouissement du second.

J'en oublie certainement encore et je m'en excuse. Encore un grand merci à tous pour m'avoir conduit à ce jour mémorable.

Sommaire

1

Présentation Générale

Ce rapport décrit mes travaux de recherche, mon expérience professionnelle ainsi que mes activités collectives depuis 2011; date de mon recrutement au CRMEF[1] de Rabat en tant que PESA[2].

1.1 Activités de recherche

Mon activité en tant que chercheur s'articule autour de deux thèmes: la topologie algébrique pure (l'homotopie rationnelle) et la topologie algébrique appliquée (topologie robotique).

Le premier m'ayant été proposé en 2005 par le professeur Mohamed Rachid Hilali de la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca comme sujet pour mon doctorat de mathématiques soutenue en octobre 2009. Il se poursuit jusqu'à aujourd'hui et j'en veux pour preuve mes 2 publications récentes ([**BHM**] et [**HMY1**] et mes 3 articles soumis ([**BM**], [**HMT**] et [**HMY2**]). Ces travaux sont le fruit d'un co-encadrement scientifique avec le Pr. M.R. Hilali de ses étudiants doctorants Badr Ben El Krafi, Jawad Tarik et Hicham Yamoul.

L'organisation de GeToPhyMa-2013[3] fût pour moi l'opportunité d'effectuer une reconversion thématique en topologie robotique. Mon initiative était largement encouragée et scientifiquement encadrée par le professeur Mark Grant de l'université de Aberdeen en Écosse. Deux articles sont maintenant soumis ([**DM2**], [**DM3**]) et un autre ([**DM1**]) publié. Ces travaux sont le fruit d'un co-encadrement scientifique avec le professeur

[1]CRMEF: Centre de Régional des Métiers de l'Enseignement et de la Formation
[2]PESA: Professeur de l'Enseignement Supérieur Assistant
[3]École de Géométrie et Topologie en Physique Mathématiques: http://algtop.net.

Youssef Rami de la faculté des sciences de Meknès de son étudiant doctorant Younes Derfoufi.

1.2 Activités d'enseignement

Mon activité en tant qu'enseignant a commencé en 1995 en Classes Prépas. Elle est aussi variée que mon domaine de recherche. Affecté en 2011 au CRMEF de Rabat, je fût chargé de continuer à enseigner en parallèle en Classes Prépas pour 2 années. Ainsi j'enseignais les mathématiques fondamentales (analyse, algèbre et géométrie) pour les élèves des Classes Prépas mais aussi leur didactique au CRMEF de Rabat pour les futurs enseignants de mathématiques aux lycées. J'encadrai par l'occasion les élèves des Classes Prépas pour leur projets de TIPE[4] et les enseignants-stagiaires du CRMEF dans leur projets de mémoires de recherche pédagogique.

En 2013, le CRMEF de Rabat ouvre un cycle de préparation au concours d'Agrégation de mathématiques. Le cycle étalé sur 2 ans est ouvert aux titulaires de Master en mathématiques ou équivalent. Je me portai volontaire pour assurer le module de géométrie affine et projective.

En 2014, la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca, ouvre un Master en topologie algébrique et robotique dans lequel je m'engageai à assurer 3 modules: Topologie Algébrique 3, Homotopie Rationnelle 2 et Topologie Robotique.

1.3 Activités collectives

Mes activités collectives sont aussi diversifiées. Ainsi depuis 2011, j'organise périodiquement l'école de recherche GeToPhyMa. En 2012, avec les professeurs M.R. Hilali et Y. Rami, on fonde un groupe de recherche en topologie algébrique; le MAAT[5]. Le groupe compte maintenant 3 professeurs et 7 doctorants, il organise mensuellement son séminaire dans les villes de Casablanca, Rabat et Meknès.

En didactique des mathématiques et en étroite collaboration avec le professeur Hassan Squalli de l'université de Sherbrooke du Canada, j'ai organisé en 2013 des journées de réflexion sur la didactique des mathématiques et en 2014 une école de recherche. Le fruit fût la création d'une association OMSEFEM[6] et l'édition d'un proceeding dont la diffusion est envisagée en Octobre 2015.

Pour accompagner en 2013 l'ouverture du cycle de préparation à l'agrégation, j'ai été membre de la commission nationale chargée de rédiger le programme officiel. J'ai aussi participé au jury du concours d'entrée, session 2013.

[4]TIPE: Travail d'Initiation Personnel Encadré. Mini-projet de recherche sur un thème précis, que les élèves sont censé présenter lors des oraux des concours d'accés aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

[5]MAAT: Moroccan Area of Algebraic Topology: http://algtop.net.

[6]OMSEFEM: Observatoire Marocain des Systèmes d'Enseignement et de Formation à l'Enseignement des Mathématiques. https://sites.google.com/site/edm062014/.

Enfin, depuis la rentrée 2014, je suis membre du conseil d'établissement du CRMEF de Rabat, membre de sa commission pédagogique ainsi que de la commission de recherche scientifique et pédagogique.

1.4 Références

Bibliography

[BHM] B. Ben El Krafi, M. R. Hilali, M . I. Mamouni, *On Hilali's conjecture related to Halperin's*, à paraître dans J. Homotopy and Related Structures, DOI: 10.1007/s40062-015-0114-y.

[BM] B. Ben El Krafi, M. I. Mamouni, *On the Theriault's conjecture for self homotopy equivalences*, soumis depuis Septembre 2015 au Belgian Mathematical Society.

[DM1] Y. Derfoufi, M.I. Mamouni, *Motion planning algorithms, topological proprieties and affine approximation*, Bulletin to Computational Applied Mathematics, Vol. **3**, No. 1 (2015), 7-12.

[DM2] Y. Derfoufi, M.I. Mamouni, *On the topology of motion planning algorithms*, soumis depuis Septembre 2015 à Mathematical Reports.

[DM3] Y. Derfoufi, M.I. Mamouni, *String topological robotics*, soumis depuis Août 2015 à Algebraic and Geometric Topology.

[HLM] M.R. Hilali, H. Lamane, and M. I. Mamouni, *Classification of rational homotopy type for 8-cohomological dimension elliptic spaces*, Advances in Pure Mathematics, Vol. (**2**) (2012), 15-21.

[HM1] M. R. Hilali, M. I. Mamouni, *A lower bound of cohomologic dimension for an elliptic space*, Topology and its Applications, Vol. 156, Issue 2 (2008), 274-283.

[HM2] M. R. Hilali, M.I Mamouni, *A conjectured lower bound for the cohomological dimension of elliptic spaces*, Journal of Homotopy and Related Structures, Vol. 3, No. 1 (2008), 379-384.

[HMT] M.R. Hilali, M.I Mamouni, J. Tarik, *On the rational homotopy type when the cohomological dimension is 9*, JP Journal of Geometry and Topology, Vol. **17**, num 2 (2015), 157-172.

[HMY1] M. R. Hilali, M.I. Mamouni, H. Yamoul, *On the Hilali conjecture for configuration spaces of closed manifolds*, Africain Diaspora Journal of Mathematics. Vol. 18 (2015), no. 1, 1 - 11.

[HMY2] M.R. Hilali, M.I Mamouni, H. Yamoul, *The rational homotopy type of elliptic spaces up to cohomological dimension 8*, à apparaître dans Afrika Matematika.

2

Volet Scientifique

2.1 Axes de recherche

2.1.1 Topologie algébrique

Un topologue s'intéresse entre autres, à classer les figures géométriques à homéomorphisme près. Intuitivement, un homéomorphisme transforme une figure sans la déchirer, ni l'écraser. Par exemple, un disque est homéomorphe à un carré plein, mais n'est homéomorphe ni à un cube plein, ni à sa surface.

Á la fin du XIXème siècle, on se posait la question si deux figures géométriques données sont homéomorphes ou non. Cette question, parmi d'autres, a donné naissance à la topologie algébrique. L'idée fondamentale de son incontestable fondateur, Henri Poincaré[1] était d'associer à tout espace topologique des invariants algébriques: nombres, groupes, espaces vectoriels, ... Deux espaces homéomorphes possèdent les mêmes invariants algébriques, comme leurs groupes d'homologie, leurs nombres de Betti, leur groupe fondamental, ... L'un des invariants algébriques les plus populaires en topologie algébrique est la notion d'homologie singulière, dont on résumera ci dessous le principe.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X est un espace topologique, on appelle n-simplexe singulier de X, toute application continue $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$, où $\Delta^n := \{\sum_{i=0}^{n} t_i e_i,\ t_i \geq 0\}$. Ici $e_0 = 0$ et $(e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0))_{1 \leq i \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note ensuite par $C_n(X)$ le groupe abélien libre formé par les n-chaînes, ce sont les sommes formelles $\sum_k n_k \sigma_k$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de n-simplexes. la k-ème face $F_k\sigma$ d'un n-simplexe singulier σ, est la

[1] H. Poincaré. Analysis situs. Journal de l'École Polytechnique. Vol 2 (1895), issue 1, 1-123.

restriction de σ au $(n-1)$-simplexe standard $\Delta_k^n := \{\sum_{i=1}^n t_i e_i,\ t_i \geq 0, i \neq k\} = \Delta_{n-1}$. On définit l'application bord:

$$\begin{array}{cccc} \partial \ : & C_n(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) \\ & \sigma & \longmapsto & \partial\sigma := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_k \sigma \end{array},$$

et on vérifie en particulier que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. On obtient alors le complexe de chaînes:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} C_{-1}(X) = 0 \ ,$$

avec $\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$. Les éléments de $\mathrm{Im}\partial_{n+1}$ s'appellent des $(n+1)$-bords, ceux de $\ker \partial_n$ s'appellent des n-cycles. Tout bord est un cycle. Le groupe quotient $H_n(X;\mathbb{Z}) := \ker \partial_n / \mathrm{Im}\partial_{n+1}$ est le n-ème groupe d'homologie singulière de X. C'est un invariant topologique qui mesure l'obstruction qu'un cycle soit un bord. La cohomologie singulière, $H^*(X;\mathbb{Z}) = \bigoplus_n H^k(X;\mathbb{Z})$ est définie de façon similaire en inversant les flèches.

Soit Y un autre espace topologique. Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes, si elle existe une application continue $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$, appelée homotopie, vérifiant $H(-,0) = f$ et $H(-,1) = g$. On écrit alors $f \sim g$.

Les espaces X et Y sont dits homotopes, ou du même type d'homotopie, lorsqu'elles existent des applications continues $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ telles que $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ et $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$. On écrit alors $X \sim Y$ et on définit ainsi une relation d'équivalence sur les espaces topologiques, appelé équivalence d'homotopie. On voit bien que l'homotopie est une déformation continue d'un objet à un autre. Par exemple, un espace est dit contractile quand il est homotope à un point.

Si A est une partie de X, deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites homotopes relativement à A, quand elle existe une homotopie $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ de f vers g vérifiant $H(a,t) = f(a) = g(a),\ \forall a \in A, \forall t \in [0,1]$. On définit alors une relation d'équivalence $f \sim g\ \mathrm{rel}A$, dont l'ensemble quotient sera noté $[(X,A);(Y,B)]$.

Si (X, x_0) un espace topologique pointé, son n-ème groupe d'homotopie est défini par la relation $\pi_n(X, x_0) := [(S^n, *); (X, x_0)]$, où S^n désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$. On remarque que $\pi_0(X, x_0)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de X et qu'on peut munir les $(\pi_n(X, x_0))_{n\geq 1}$ d'une structure de groupe. On montre alors que si X est connexe par arc, alors les $(\pi_n(X, x_0))_{n\geq 0}$ ne dépendent pas de x_0. En particulier, $\pi_1(X)$ s'appelle le groupe fondamental de X.

2.1.2 Homotopie rationnelle

L'homotopie rationnelle est une branche de la topologie algébrique pure, fondée vers la fin des années 70 par Dennis Sullivan et Daniel Quillen. Elle a pour objectif d'étudier le type d'homotopie rationnelle d'un espace topologique en ignorant les torsions de ses groupes d'homotopie.

En effet, un espace topologique simplement connexe est dit rationnel quand ses groupes d'homotopies sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. On montre alors qu' à tout espace topologique simplement connexe X, on peut associer un CW-complexe[2] rationnel, unique à homotopie prés, noté $X_{\mathbb{Q}}$, appelé rationalisé de X et vérifiant les isomorphismes de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels suivants

$$\begin{array}{rcl} \pi_*(X_{\mathbb{Q}}) & \cong & \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \\ H^*(X_{\mathbb{Q}}; \mathbb{Q}) & \cong & H^*(X; \mathbb{Q}). \end{array}$$

Le type d'homotopie de $X_{\mathbb{Q}}$ s'appelle type d'homotopie rationnelle de X.

Rappelons qu'un espace topologique simplement connexe X est dit de type fini, quand les $H^k(X; \mathbb{Q})$ sont tous de dimensions finies. L'idée de D. Sullivan était d'encoder le type d'homotopie rationnelle de tels espaces à l'aide d'algèbres particulières: les algèbres différentielles graduées commutatives (ADGC). Ce sont des algèbres différentielles graduées (A, d), commutatives (i.e., $a.b = (-1)^{|a||b|} b.a$), vérifiant la relation de Leibniz $d(a.b) = da.b + (-1)^{|a|} a.db$.

Un modèle minimal de Sullivan est toute ADGC libre $(\Lambda V, d)$ engendrée par un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué V, lui même engendré par une base $((v_k))_{k \in I}$ bien ordonnée (i.e., I ensemble d'indices totalement ordonné avec $k < p \implies |v_k| < |v_p|$) et minimale au sens que $dv_k \in \Lambda^{p \geq 2}\{v_p,\ p < k\}$. D. Sullivan [3] montre que tout espace topologique simplement connexe et de type fini, peut être rationnellement modélisé par une ADGC minimale $(\Lambda V, d)$ (unique à isomorphisme prés) dans le sens suivant:

$$\begin{array}{rcll} \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} & \cong & \hom(V, \mathbb{Q}) & \text{en tant qu'espaces vectoriels} \\ H^*(X; \mathbb{Q}) & \cong & H^*(\Lambda V, d) & \text{en tant qu'algèbres.} \end{array}$$

Une algèbre de Lie graduée est tout espace vectoriel gradué $\mathbb{L}$, muni d'un crochet $[-, -]$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

- Antisymétrie: $[x, y] = (-1)^{|x||y|}[y, x]$;
- Identité de Jacobi: $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$.

Une algèbre de Lie différentielle graduée (ALDG) est toute algèbre de Lie graduée $\mathbb{L}$ munie d'une différentielle d, vérifiant la relation $d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{|x|}[x, dy]$.

Si (V, d) est un espace vectoriel différentiel gradué, alors son algèbre tensorielle TV muni du crochet $[a, b] := ab - ba$ est une algèbre de Lie graduée. La sous algèbre engendrée par V, notée $\mathbb{L}_V$, est une ALDG appelée l'ALDG libre engendrée par V. La différentielle initialement définie sur V s'étend de façon linéaire et naturelle à $\mathbb{L}_V$ en respectant la relation $d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{|x|}[x, dy]$.

[2]CW-complexe: type d'espace topologique obtenu à partir d'un ensemble de points en recollant successivement des « cellules » fermées de dimension supérieure le long de leurs bords.

[3]D. Sullivan. Infinitesimal computations in topology. Publications Mathématiques de l'IHÉS, **47** (1977), 269-331.

Un modèle minimal de Quillen est toute ALDG libre $(\mathbb{L}_V, d)$, tel que V admet une base $((v_k))_{k\in I}$ bien ordonnée et minimale au sens que $dv_k \in \mathbb{L}^{p\geq 2}\{v_p,\ p<k\}$. D. Quillen[4] montre que tout espace topologique simplement connexe et de type fini, peut être rationnellement modélisé par une ALDG minimale $(\mathbb{L}_V, d)$ (unique à isomorphisme prés) dans le sens suivant:

$$\begin{array}{rcll} \pi_{*+1}(X)\otimes\mathbb{Q} & \cong & H^*(\mathbb{L}_V, d) & \text{en tant qu'algèbres} \\ \tilde{H}^{*+1}(X;\mathbb{Q}) & \cong & V & \text{en tant qu'espaces vectoriels.} \end{array}$$

2.1.3 Topologie robotique

La planification de mouvement est un thème classique de la robotique qui s'intéresse au calcul de la trajectoire sans collision d'un robot en prenant en compte la topologie et géométrie du milieu de déplacement.

Michael Farber [5] perçoit un robot comme un système mécanique et note X l'espace topologique de tous ses états. Quand X est connexe par arc, il définit un algorithme de planification de mouvement (APM) comme étant toute section continue $s : X\times X \longrightarrow PX$ de la projection $\begin{array}{rccc} ev: & PX & \longrightarrow & X\times X \\ & \gamma & \longmapsto & (\gamma(0),\gamma(1)) \end{array}$, où PX désigne l'ensemble des chemins tracés sur X muni de la topologie ouverte-compacte. Ici s suggère pour toute paire (A,B) de points de X, un chemin $s(A,B)$ du point $s(A,B)(0)=A$ au point $s(A,B)(1)=B$. M. Farber montre en particulier que de telles sections existent si et seulement si X est contractile.

M. Farber interprète la continuité des APM comme étant une condition suffisante pour garantir la stabilité du mouvement du robot dans le sens suivant: Si (A,B) et (A',B') sont très proches l'un de l'autre, alors l'APM va suggérer au robot des chemins $s(A,B)$ et $s(A',B')$ qui sont aussi très proches l'une de l'autre. Il définit ensuite un invariant qui mesure la complexité de cette continuité, en quelque sorte la complexité topologique pour trouver des APM. Cet invariant, noté $\mathrm{TC}(X)$ et appelé complexité topologique, est défini comme étant le plus petit entier n (ou l'infini) tel que $X\times X$ peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles $(U_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que sur chacun d'eux ev admet une section locale $s_i : U_i \longrightarrow PX$ (i.e., $ev\circ s_i = \mathrm{id}_{U_i}$). Ainsi on a $\mathrm{TC}(X)=0$ si et seulement si X est contractile. M. Farber montre par exemple que $\mathrm{TC}(S^{2n})=1$ et que $\mathrm{TC}(S^{2n+1})=2$.

[4] D. Quillen. Rational homotopy theory. Vol. 90 (1969), tome 2. Annals of Mathematics, 205-295.

[5] M. Farber. Topological complexity of motion planning. Discrete Comput. Geom. 29 (2003), 211-221.

2.2 Articles

Ma production scientifique pour la période 2012-2015, détaillée dans l'annexe I: Articles, se compose de 9 articles, dont:

- 4 publiés:

  1. M.R. Hilali, H. Lamane, and M. I. Mamouni, *Classification of rational homotopy type for 8-cohomological dimension elliptic spaces*, Advances in Pure Mathematics, Vol. (**2**) (2012), 15-21.
  2. M. R. Hilali, M.I. Mamouni, H. Yamoul, *On the Hilali conjecture for configuration spaces of closed manifolds*, Africain Diaspora Journal of Mathematics. Vol. 18 (2015), no. 1, 1 - 11.
  3. Y. Derfoufi, M.I. Mamouni, *Motion planning algorithms, topological proprieties and affine approximation*, Bulletin to Computational Applied Mathematics, Vol. **3**, No. 1 (2015), 7-12.
  4. M.R. Hilali, M.I Mamouni, J. Tarik, *On the rational homotopy type when the cohomological dimension is 9*, JP Journal of Geometry and Topology, Vol. **17**, num 2 (2015), 157-172.

- 2 acceptés

  1. B. Ben El Krafi, M. R. Hilali, M . I. Mamouni, *On Hilali's conjecture related to Halperin's*, à paraître dans J. Homotopy and Related Structures, DOI: 10.1007/s40062-015-0114-y.
  2. M.R. Hilali, M.I Mamouni, H. Yamoul, *On classification of the rational homotopy type for elliptic spaces up to dimension 8*, à paraître dans Afrika Matematika.

- 3 soumis:

  1. B. Ben El Krafi, M. I. Mamouni, *On the Theriault's conjecture for self homotopy equivalences*, soumis depuis Septembre 2015 au Belgian Mathematical Society.
  2. Y. Derfoufi, M.I. Mamouni, *On the topology of motion planning algorithms*, soumis depuis Septembre 2015 à Mathematical Reports.
  3. Y. Derfoufi, M.I. Mamouni, *String topological robotics*, soumis depuis Août 2015 à Algebraic and Geometric Topology.

Ces articles survolent les thèmes de recherche détaillés ci dessous:

2.2.1 Conjecture de Hilali

La conjecture de Hilali était mon premier sujet de recherche. Il m'a été proposé en 2005 comme sujet de mémoire de DESA par mon encadrant Pr. M.R. Hilali. La conjecture[6]

[6] M.R. Hilali, *Action du tore $\mathbb{T}^n$ sur les espaces simplement connexes*, Thèse , Univ. catholique de Louvain, Belgique, 1990.

stipule que

$$\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \leq \dim H^*(X;\mathbb{Q})$$

lorsque X est CW-complexe simplement connexe elliptique (i.e., $\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}$ et $\dim H^*(X;\mathbb{Q})$ sont de dimension finies). En terme de modèles de Sullivan, la conjecture s'écrit

$$\dim V \leq \dim H^*(\Lambda V, d).$$

Mes investigations sur cette conjecture continuent depuis 2005 jusqu'à nos jours, en témoignent mes articles publiés ([**HM1**], [**HM2**]) ou acceptés ([**BHM**], [**HMY1**]). Ainsi on a résolu la conjecture pour les:

- H-espaces, quand $d = 0$;
- espaces pures, quand $dV^{\text{pair}} = 0$ et $dV^{\text{impair}} \subset \Lambda^{\geq 2}V^{\text{pair}}$;
- espaces hyperelliptiques sous conditions, quand $dV^{\text{impair}} \subset \Lambda^{\geq 2}V^{\text{pair}}$;
- les espaces co-formels, quand $dV \subset \Lambda^2 V$;
- les espaces formels, quand $(\Lambda V, d) \cong (H^*(\Lambda V, d), 0)$;
- les variétés symplectiques;
- les variétés co-symplectiques;
- les nilvariétés.

2.2.2 Classification du type d'homotopie rationnelle

Depuis 2012 on s'est intéressé à un sujet de recherche déjà initié par Pr. M. R. Hilali en 1990 dans sa thèse. Il s'agit de déterminer le type d'homotopie rationnelle d'un CW-complexe simplement connexe X elliptique, pour une dimension cohomologique donnée. Pour $0 \leq \dim H^*(X;\mathbb{Q}) \leq 9$, on obtient une classification complète résumée dans les tableaux suivants:

$\dim H^*(X;\mathbb{Q})$	Type d'homotopie rationnelle de X (ref. [**HMY2**])
1	$*$
2	S^n
3	$S^n_{(2)}$
4	$S^n \times S^m$ $S^n_{(3)}$ X_λ tel que $H^*(X_\lambda;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/(ab, a^2-\lambda b^2)$
5	$S^n_{(4)}$ $S^n_{(3)}\#S^m_{(2)}$
6 avec $\chi_\pi = 0$	$S^n_{(5)}$ $S^n \times S^m_{(2)}$ X_λ tel que $H^*(X_\lambda;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/(ab, a^2-\lambda b^4)$ Y_λ tel que $H^*(Y_\lambda;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/(b^2+ab+\lambda a^2)$ Z_λ tel que $H^*(Z_\lambda;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/(a^3, b^2+\lambda a^2)$
6 avec $\chi_\pi \neq 0$	$S^n \times S^m_{(2)}$ $Y,$ espace total de la fibration $S^{n+m-1} \longrightarrow Y \longrightarrow S^n \times S^m$
7	$S^n_{(6)}$ $S^n_{(2)}\#S^m_{(5)}$ $S^n_{(3)}\#S^m_{(4)}$ Y tel que $H^*(Y;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b]/(a^2b, a^3-b^2)$
8 avec $\chi_\pi = 0$	$S^n_{(7)}$ $S^n_{(4)} \times S^m_{(2)}$ $S^n_{(4)}\#S^n_{(4)}$ $S^n_{(5)}\#S^m_{(3)}$ $S^n_{(2)} \times S^m_{(2)} \times S^k_{(2)}$ $X_{\alpha,\beta,\gamma}$ tel que $H^*(X_{\alpha,\beta,\gamma};\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[a,b,c]/(a^2-\alpha bc, b^2-\beta ac, c^2-\gamma ab)$

$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) = 8$ avec $\chi_\pi \neq 0$	Type d'homotopie rationnelle de X (ref. [**HLM**])
	$S^n_{(3)} \times S^m$ $S^n \times S^m \times S^k$ $\left(S^n \times S^n \times S^{2n}\right)\#S^{2n}_{(2)}$ $S^n \times S^m \times S^k \times S^r$ $S^n \times X_\lambda$ de modèle minimal $(\Lambda(a,b,x,y),d)$ tel que $da = db = 0, dx = ab, dy = b^2 - \lambda a^2$ Y espace total d'un fibré de base $S^n \times S^m$

$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) = 9$	Type d'homotopie rationnelle de X (ref. **[HMT]**)
	$S^n_{(8)}$
	$S^n_{(2)} \# S^m_{(7)}$
	$S^n_{(3)} \# S^m_{(6)}$
	$S^n_{(4)} \# S^m_{(5)}$
	$S^n_{(2)} \# S^{n+m}_{(2)}$
	Y tel que $H^*(Y;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\,[a,b]\,/\,\big(a^2b, a^5 - b^2\big)$
	Z tel que $H^*(Y;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\,[a,b]\,/\,\big(a^3b, a^3 - b^2\big)$
	$Y_{\lambda,\mu}$ tel que $H^*(Y_{\lambda,\mu};\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\,[a,b]\,/\,\big((a^3 + \lambda a^2 b, b^3 + \mu a b^2)\big)$
	$Z_{\lambda,\mu}$ tel que $H^*(Y_{\lambda,\mu};\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}\,[a,b]\,/\,\big((a^3 - ab, \lambda a^6 + \mu b^3)\big)$

Ici χ_π désigne la caractéristique homotopique d'Euler-Poincaré de X, définie par $\chi_\pi := \dim V^{\text{pair}} - \dim V^{\text{impair}}$ où $(\Lambda V, d)$ est le modèle minimal associé à X. Les principaux résultats utilisés pour aboutir à cette classification sont

- S. Halperin:[7] $\chi_\pi(X) \leq 0$ et $\chi_c(X) \geq 0$, avec $\chi_\pi(X) = 0 \Leftrightarrow \chi_c(X) \neq 0$, où χ_c désigne la caractéristique homologique d'Euler-Poincaré de X, définie par $\chi_c := \dim H^{\text{pair}}(\Lambda V, d) - \dim H^{\text{impair}}(\Lambda V, d)$.

- J. Friedlander et S. Halperin:[8]
  - $\displaystyle\sum_{|a_i| \text{pair}} |a_i| \leq fd(X)$;
  - $\displaystyle\sum_{|a_i| \text{impair}} |a_i| \leq 2.fd(X) - 1$;
  - $\displaystyle fd(X) = \sum_{|a_j| \text{impair}} |a_j| - \sum_{|a_i| \text{pair}} (|a_i| - 1)$.

  où (a_i) base de V et $fd(X) := \max\{k,\ \ H^k(X;\mathbb{Q}) \neq 0\}$ désigne la dimension formelle de X.

La suite naturelle de ce travail sera d'étudier le comportement du type d'homotopie rationnelle de X en basses dimensions cohomologiques avant de conjecturer un comportement général.

2.2.3 Conjecture de Theriault

Mon intérêt pour ce 3ème sujet de recherche date de 2013 suite à ma participation à une conférence à Nantes[9] quand Stephen Theriault de l'université de Southampton en Angleterre exposa sa conjecture. S. Theriault avance pour tout espace topologique X, que la

[7] S. Halperin, *Finitness in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Math. Soc. **230** (1983) 173–199.
[8] J. Friedlander, S. Halperin, *An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces*, Invent. Math. **53** (1979) 117–133.
[9] 60ème anniversaire de Lionel Schwartz: http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/ LS60/

nilpotence homotopique du monoide $\mathrm{aut}(X)$ est finie quand la cocatégorie de son espace classifiant $\mathrm{Baut}(X)$ l'est. Ici $\mathrm{aut}(X)$ désigne l'ensemble des bijections (à homotopie prés) de X.

Nous ([**BM**]) avons complètement résolu cette conjecture dans le contexte de l'homotopie rationnelle. Plus encore, nous avons démontré que

$$\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}(X)) \leq \mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}\mathrm{Baut}(X).$$

Avant de résumer nos résultats, on rappelle ci dessous les définitions et notations utilisées. Dans toute cette section, X est un espace topologique simplement connexe de modèle minimal de Sullivan $(\Lambda V, d)$, et de modèle minimal de Quillen $(\mathbb{L}_W, \partial)$.

Une auto-équivalence d'homotopie (self homotopy equivalence) de X est toute application $f : X \longrightarrow X$ qui admet un inverse homotopique pour la loi de composition $\circ$. L'ensemble de telles applications, noté $\mathrm{aut}(X)$, est muni d'une structure naturelle de monoïde associative. Son nilpotence homotopique $\mathrm{Hnil}(\mathrm{aut}(X))$ est définie comme étant le plus petit entier n (ou l'infini) tel que le $(n+1)$éme commutateur c_{n+1} est homotopiquement nul. Ici $c_n : \mathrm{aut}(X)^n \longrightarrow \mathrm{aut}(X)$ est définie de façon inductive comme suit: c_1 c'est l'identité, $c_2(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$ et $c_n := c_2 \circ (c_{n-1} \times c_1)$. Selon Félix et all.[10], $\mathrm{aut}(X)$ est simplement connexe et du même type d'homotopie qu'un CW-complexe, donc admet un rationalisé $\mathrm{aut}(X)_{\mathbb{Q}}$. La nilpotence d'homotopie rationnelle de $\mathrm{aut}(X)$ est définie par $\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}(X)) := \mathrm{Hnil}(\mathrm{aut}(X)_{\mathbb{Q}})$.

Rappelons que l'espace classifiant BG d'un groupe topologique G est le quotient EG/G d'un espace faiblement contractile[11] EG, par une action libre de G. Il permet de classer tous les G-bundles principaux, dans le sens où tout G-bundle principal sur une variété paracompacte Y est isomorphe au pullback du G-bundle principal $EG \longrightarrow BG$.

On appelle dérivation de degré n sur une ADGC (A, d), toute application linéaire $\theta : A^* \longrightarrow A^{*-n}$ vérifiant $\theta(a.b) = \theta(a).b - (-1)^{n|a|}a.\theta(b)$. L'ensemble des dérivations de degré n sur (A, d) se note $\mathrm{Der}^n(A)$. En posant $[\theta_1, \theta_2] := \theta_1 \circ \theta_2 - (-1)^{|\theta_1|.|\theta_2|}\theta_2 \circ \theta_1$ et $D(\theta) := [d, \theta]$ on munit l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Der}^*(A)$ d'une structure d'ALDG.

D. Sullivan[12] montre que les types d'homotopie rationnelle de $\mathrm{aut}(X)$ et de $\mathrm{Baut}_1(X)$ ne dépendent que de celui de X, dans le sens où le modèle minimal de Sullivan de $\mathrm{aut}(X)$ est donné par la relation $\pi * (\mathrm{aut}(X)) \otimes \mathbb{Q} \cong H_*(\mathrm{Der}(\Lambda V), D)$, alors que le modèle de Quillen de $\mathrm{Baut}_1(X)$ est isomorphe en tant qu'ALDG à $(\mathrm{Der}(\Lambda V), D)$. Ici $aut_1(X)$ désigne la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{aut}(X)$.

M. Sbaï[13] définit la cocatégorie rationnelle de X, notée $\mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(X)$, comme étant le

[10]Y. Félix, G. Lupton and S. B. Smith, *The rational homotopy type of the space of self-equivalences of a fibration*, Homology, Homotopy and Applications, vol. **12**(2), 2010, 371-400.
[11]Tous les groupes d'homotopie sont triviaux
[12]D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology, Publ. I.H.E.S. 47 (1977), 269-331.
[13]M. Sbaï, *La cocatégorie rationnelle d'un espace*, Thèse de 3ème cycle, Univ. Lille, France (1984).

plus petit entier n (ou l'infini) tel que la projection

$$(\mathbb{L}_W, \partial) \longrightarrow (\mathbb{L}_W/\mathbb{L}_W^{\geq n+1}, \partial)$$

admet une rétraction homotopique. Il montre en particulier que:

- $\mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(X) = 0$ si et seulement si X est contractile;
- $\mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(S^{2n+1}) = 1$ et $\mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(S^{2n}) = 2$.

S. Theriault formulait sa conjecture comme suit:

$$\mathrm{cocat}(\mathrm{Baut}(X)) < \infty \Rightarrow \mathrm{Hnil}(\mathrm{aut}(X)) < \infty?$$

On a résolu cette question dans un contexte de l'homotopie rationnelle. Plus précisément, on a montré **[BM]**, quand $\mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Baut}(X))$ est finie, que:

- $\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}(X)) \leq \mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Baut}(X))$;
- Avec égalité quand $\mathrm{Baut}(X)$ est coformel;
- $\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}(X)) \leq 2$ quand $\mathrm{Baut}(X)$ est formel.

Les deux derniers résultats, conditions nécessaires de formalité ou de coformalité de $\mathrm{Baut}(X)$, sont importants dans le sens où leurs négations peuvent être utilisées comme obstruction à la formalité ou à la coformalité de $\mathrm{Baut}(X)$. Toutefois $\mathrm{Baut}(X)$ est rarement nilpotent; il est donc difficile voir impossible d'étudier sa formalité.

Pour pallier à ce défaut, on a étudié la conjecture de Theriault pour $\mathrm{aut}_1(X)$. On a obtenu des résultats similaires. Plus précisément on a montré, quand $\mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Baut}_1(X))$ est finie, que:

- $\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}_1(X)) \leq \mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Baut}_1(X))$;
- Avec égalité quand $\mathrm{Baut}_1(X)$ est coformel;
- $\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}_1(X)) \leq 2$ quand $\mathrm{Baut}_1(X)$ est formel.

L'intérêt de ces résultats établis pour $\mathrm{aut}_1(X)$ est qu'ils s'intersectent de façon homogène avec d'autres problèmes ouverts aussi bien populaires que celui de Theriault, par exemple avec la question posée par S.B. Smith[14] quand $\mathrm{Baut}_1(X)$ est un H-espace? ou avec celle posée par D.W. Khan[15] sur la réalisation de $\mathrm{aut}_1(X)$: pour un groupe topologique donné G, existe-t-il un espace topologique X tel que $G \cong \mathrm{aut}_1(X)$?

[14] S. B. Smith, *Rational type of classifying spaces for fibrations*, Groups of homotopy self-equivalences and related topics (Gargnano, 1999), Contemp. Math., vol. **274**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001), 299-307.

[15] D.W. Khan, *Realization problem for the group of homotopy classes of self-homotopy equivalences*, Math. Annalen, vol **220** (1976), 37-46.

Notons que tout H-espace est formel, que le problème de réalisation a été résolu pour les groupes finis[16] et que la classification des groupes de nilpotence rationnelle inférieure à 2 a été complètement décrite par F. J. Grunewald[17] et all[18]. Notre 3ème résultat pour $\mathrm{aut}_1(X)$ combiné avec ces remarques donne une réponse complète au problème de S.B. Smith quand X est elliptique.

Notre 2ème résultat pour $\mathrm{aut}_1(X)$ trouve aussi son utilité dans la fameuse conjecture de S. Halperin[19] qui stipule que la suite spectrale de Serre collapse au second terme pour toute fibration entre espaces simplement connexes et dont la fibre X est un F_0[20]-CW complexe elliptique. En effet, si X vérifie la conjecture de Halperin, alors $\mathrm{Baut}_1(X)$ est coformel[21] avec $\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}_1(X)) = 1$[22]. Combinant ceci avec notre 2ème résultat pour $\mathrm{aut}_1(X)$, on trouve que la relation $\mathrm{Hnil}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{aut}_1(X)) = \mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Baut}_1(X)) = 1$ restreint considérablement le champs de véracité de la conjecture de Halperin, quand $\mathrm{cocat}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Baut}_1(X))$ est finie.

2.2.4 Topologie robotique

Rappelons qu'en topologie robotique M. Farber définit un algorithme de planification de mouvements (APM) comme étant toute section continue $s : X \times X \longrightarrow PX$ de la projection $\begin{array}{rccc} ev: & PX & \longrightarrow & X \times X \\ & \gamma & \longmapsto & (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array}$. Il montre en particulier que de telles sections existent si et seulement si X est contractile.

Nous nous sommes intéressés en premier lieu au comportement topologique des APM. Ainsi on a montré[**DM1**] que quand X est un espace vectoriel normé, on peut approcher de façon uniforme tout APM par une suite d'APM affines par morceaux.

Quand X est une variété compacte contractile on la munit d'une métrique d_X[23]. On note par $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des APM sur X, qu'on munit de la topologie ouverte-compacte induite par celle $\mathrm{map}(X \times X, PX)$, puis on montre les résultats suivants[**DM2**]:

- $\mathcal{M}(X)$ est aussi contractile;
- $\mathcal{M}(X)$ est aussi métrisable à l'aide d'une métrique notée $\mathcal{M}(d_X)$ induite par d_X;

[16] C. Costoya and A. Viruel, *Every finite group is the group of self-homotopy equivalences of an elliptic space*, Acta Mathematica, Vol. **213** (2014), 49-62.

[17] F. J. Grunewald and R. Scharlau, *A note on finitely generated torsion-free nilpotent groups of class 2*, Journal of Algebra, Vol. **58**, Issue 1 (1979), 162-175.

[18] F. J. Grunewald, D. Segal and L. S. Sterling, *Nilpotent groups of Hirsch length six*, Mathematische Zeitschrift, Vol. **179**, Issue 2 (1982), 219-235.

[19] Page 516 de Y. Félix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, vol. **205** (2001), Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

[20] $H^{\mathrm{impair}}(X;\mathbb{Q}) = 0$.

[21] S. B. Smith, *Rational type of classifying spaces for fibrations*, Groups of homotopy self-equivalences and related topics (Gargnano, 1999), Contemp. Math., vol. **274**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2001), 299-307.

[22] Y. Félix, G. Lupton and S. B. Smith, *The rational homotopy type of the space of self-equivalences of a fibration*, Homology, Homotopy and Applications, vol. **12**(2), 2010, 371-400.

[23] voir Urysohn metrization theorem dans J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon, Inc. (1966).

- $(\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(d_X))$ est aussi complet;
- $(\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(d_X))$ et $(\mathcal{M}(Y), \mathcal{M}(d_Y))$ sont isométriques quand (X, d_X) et (Y, d_Y) le sont.

Le 3ème résultat trouve une application réelle en intelligence artificielle, plus précisément dans le fameux algorithme des fourmis. Le 4ème résultat peut être interprété comme une classification des APM. Les 3 premiers résultats nous poussent à se demander si $(\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(d_X))$ est aussi connexe par arcs et/ou compact. On conjecture alors qu'en général, le comportement topologique de $\mathcal{M}(X)$ est le même que ce lui de X.

Dans un point de vue catégorique, on définit un foncteur contravariant

$$\mathcal{M} : \left\{ \begin{array}{rl} X: & \text{variétés compactes} \\ & \text{connexes par arcs} \\ & \text{et contractiles} \\ d_X: & \text{metrique} \\ \varphi: & \text{isometrie} \end{array} \right\} \longmapsto \left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{M}(X): & \text{espaces topologiques} \\ & \text{complets et contractiles} \\ & \\ \mathcal{M}(d_X): & \text{metrique} \\ \mathcal{M}(\varphi): & \text{isometrie} \end{array} \right\}$$

Des réponses positives à nos questions posées ci dessous nous fournirait plus d'information sur la nature de ce foncteur.

Dans un second temps, on s'est posé la question suivante: Si les APM au sens de M. Farber suggèrent à un robot un chemin d'un point donné A vers un autre point donné B, pourquoi ne pas définir un autre concept d'APM qui suggèrent au robot un aller-retour d'un point donné A en passant par un autre point donné B? Une telle approche a déjà été proposée par M. Farber et M. Grant[24], mais ils imposaient au robot d'emprunter au retour le même chemin que celui de l'aller. Notre approche est plus générale, on n'imposait aucun condition sur le chemin de retour.

On définit[**DM3**] alors un algorithme de planification de mouvements fermés (APMF) sur X, comme étant toute section continue $s : X \times X \longrightarrow X^{S^1}$ de la bi-évaluation

$$\begin{array}{rcccl} ev^{\mathrm{LP}} & : & X^{S^1} & \longrightarrow & X \times X \\ & & \gamma & \longmapsto & (\gamma(0), \gamma(\frac{1}{2})) \end{array},$$

où X^{S^1} désigne l'ensemble des chemins fermés tracés sur X. Dans le même esprit que celui de Farber, on montre que les APMF existent si et seulement si X est contractile. Notre notion d'APMF trouve son utilité dans les mouvements de robots téléguidés, tels les drones ou les caméra-avions télécommandées, mais aussi dans le fameux NP-complet problème de tournées de véhicules.

Pour mesurer la complexité des APMF, on définit la complexité topologique fermée, notée $\mathrm{TC}^{\mathrm{LP}}$, comme étant tant le plus petit entier n (ou l'infini) tel que $X \times X$ peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que sur chacun d'eux ev^{LP} admet

[24] M. Farber, M. Grant, *Symmetric motion planning*, Contemp. Math. , no. **438** (2007), 85-104.

une section locale $s_i : U_i \longrightarrow X^{S^1}$ (i.e., $ev^{\mathrm{LP}} \circ s_i = \mathrm{id}_{U_i}$). On montre alors que

$$\mathrm{TC}^{\mathrm{LP}}(X) = \mathrm{TC}(X).$$

L'intérêt de notre résultat est que la complexité du mouvement ne change pas quand on laisse le robot libre d'emprunter n'importe quel chemin de retour, alors que si on lui impose un chemin de retour identique à celui de l'aller, la complexité augmente. En effet M. Farber et M. Grant ont démontré que $\mathrm{TC}(X) \leq \mathrm{TC}^S(X)$.

Notons aussi l'intersection frappante entre notre complexité fermée et celle monoïdale, notée TC^M et introduite par N. Iwase et M. Sakai[25]: les deux s'intéressent aux algorithmes de planification de mouvements quand la position initiale du robot coïncide avec sa position finale. Notre résultat $\mathrm{TC}^{\mathrm{LP}} = \mathrm{TC}$ peut être considérée comme une direction de recherche valable pour résoudre la fameuse conjecture de Iwase-Sakai[26] qui prédit que $\mathrm{TC} = \mathrm{TC}^M$.

Dans un second temps, on s'est intéressé à l'ensemble des APMF, noté ici $\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)$. Notre premier résultat était que $\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X) \neq \emptyset$ si et seulement si X est contractile, et que dans ce cas $\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)$ est aussi contractile et donc homotopiquement trivial. Mais ce résultat fût en lui même une obstruction à notre second objectif; l'étude homologique des APMF.

Pour contourner cet obstacle nous avons adopté l'approche de Lubawski-Marzantowicz[27], pour qui les APM ne sont pas censés être continus, et donc leurs existence ne nécessitent pas de contractilité de X. En effet W. Lubawski et W. Marzantowicz remplacent PX par $PX \times_{X/G} PX := \{(\gamma, \tau) \in PX \times PX,\ G.\gamma(0) = G.\tau(1)\}$, où G est un groupe de Lie compact qui agit sur X. Cette G-action compense la discontinuité des APM et assure la stabilité du mouvement, dans le sens où une légère perturbation au niveau du point de départ ou celui de l'arrivée du mouvement n'induit qu'une légère perturbation sur le mouvement tout entier. Ainsi dans la suite, ni X ni $\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)$ n'est supposé être contractile.

Notre idée était de marier deux théories, la string topologie et la topologie robotique et définir par la suite la notre; la string topologie robotique. Notre remarque clé était que les deux théories utilisaient un ingrédient commun: les évaluations. Ainsi M. Farber utilise l'application $\begin{array}{cccc} ev : & PX & \longrightarrow & X \times X \\ & \gamma & \longmapsto & (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array}$ comme outil primordial dans toute sa théorie, alors que M. Chas et D. Sullivan [28] utilisent l'application $\begin{array}{cccc} ev : & C_*(X^{S^1}) & \longrightarrow & C_*(X) \\ & \gamma & \longmapsto & \gamma(0) \end{array}$ pour relier les simplexes de X^{S^1} à ceux de X.

[25]N. Iwase, M. Sakai, *Topological complexity is a fibrewise L-S category*, Topology and its Appl., vol **157**, no. 1 (2010), 10 -21.

[26]N. Iwase, M. Sakai, Erratum to *Topological complexity is a fibrewise L-S category*, Topology and its Appl., vol. **159**, no 10-11 (2012), 2810-2813.

[27]W. Lubawski, W. Marzantowicz, *Invariant topological complexity*, Bull. London Math. Soc., vol. **47** (2015) 101-117.

[28]M. Chas, D. Sullivan, *String Topology*, arXiv:math/9911159 [math.GT]

Avant de détailler notre approche, résumons ci dessous les grandes lignes des idées de M. Chas et D. Sullivan dont l'objectif principal était d'étudier les structures algébriques de la cohomologie de X^{S^1}. Dans le contexte de M. Chas et D. Sullivan, X est une variété fermée orientée de dimension n. Leurs point de départ était la composée de chemins fermés[29], qu'ils exploitent pour étendre le produit d'intersection (défini au niveau des simplexes de X) en un string produit (défini au niveau des simplexes de X^{S^1}). Ce dernier munit $\mathbb{H}_*(X^{S^1}) := H_{*+n}(X^{S^1};\mathbb{Z})$ d'une structure d'algèbre graduée commutative et associative. Ensuite, ils définissent sur $\mathbb{H}_*(X^{S^1})$ un crochet $\{-,-\}$ qui, combiné avec le string produit, muni $\mathbb{H}_*(X^{S^1})$ d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber. Enfin, ils étendent cette structure d'algèbre de Gerstenhaber en une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky, où le BV-opérateur est induit par la S^1-action sur $\mathbb{H}_*(X^{S^1})$.

Rappelons que X, en tant que variété compacte de dimension n, vérifie la dualité de Poincaré: $\dim H_n(X;\mathbb{Q}) = 1, \dim H_k(X;\mathbb{Q}) = 0\ \forall k > n$ et elle existe une application bilinéaire non dégénérée $H_i(X;\mathbb{Q}) \otimes H_{n-i}(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^n(X;\mathbb{Q})$. Dans toute la suite, $[X]$ désignera le générateur de $H^n(X;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ et sera appelé classe fondamentale de X.

On dit que deux sous variétés orientées Y et Z s'intersectent transversalement dans X, quand pour tout $x \in Y \cap Z$, nous avons $T_xY \oplus T_xZ = T_xX$, où T_x désigne l'espace tangent en x à la sous variété sus-jacente contenant x. Dans ce cas si Y et Z sont de dimensions respectives i et j, alors $Y \cap Z$ est une sous-variété de X orientée et de dimension $i + j - n$. Leur produit d'intersection est bien défini comme suit

$$\begin{array}{rccc} . \ : & H_i(X;\mathbb{Z}) \otimes H_j(X;\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{i+j-n}(X;\mathbb{Z}) \\ & [Y] \otimes [Z] & \longmapsto & [Y] \cdot [Z] := [Y \cap Z] \end{array},$$

où $[-]$ désigne la classe fondamentale de la variété sus-jacente.

Le première difficulté pour M. Chas et D. Sullivan était que la transversalité au niveau de $LX := X^{S^1}$ est un peu spécifique: un chemin dans LX est un chemin de chemins, et un vecteur tangent y est un espace vectoriel. Pour contourner ce problème, leur approche consistait à:

- considérer deux simplexes $\Sigma : \Delta^i \longrightarrow LX$ et $\Gamma : \Delta^j \longrightarrow LX$ de LX tels que $\Sigma(1) : \Delta^i \longrightarrow X$[30] et $\Gamma(1) : \Delta^j \longrightarrow X$ s'intersectent transversalement dans X;

- calculer le produit d'intersection $\Sigma(1).\Gamma(1)$ en tous points $(s,t) \in \Delta^i \times \Delta^j$ tels que $\Sigma(1)(s) = \Gamma(1)(t)$;

- combiner ce produit avec la concaténation des lacets $\Sigma(s)$ and $\Gamma(t)$ pour obtenir un $(i + j - n)$-simplexe $\Sigma \bullet \Gamma : \Delta^{i+j-n} \longrightarrow LX$;

- étendre ce procédé au niveau de l'homologie $\mathbb{H}_*(LX) := H_{*+n}(LX;\mathbb{Z})$ pour obtenir

[29] Concaténation naturelle de deux lacets quand ils ont un point de base commun.

[30] $\Delta^i := \left\{ \sum_{k=1}^{i} t_k e_k,\ t_k \geq 0 \right\}$, où $(e_k)_{1 \leq k \leq i}$ base canonique de $\mathbb{R}^i$.

un string produit $\mathbb{H}_i(X) \otimes \mathbb{H}_j(X) \xrightarrow{\bullet} \mathbb{H}_{i+j}(X)$, qui munit $\mathbb{H}_*(X)$ d'une structure d'algèbre associative et commutative.

Dans notre souci de généralisation, on va adopter la philosophie de F. Laudenbach[31], qui a étendu les travaux de M. Chas et D. Sullivan à toute variété, compacte ou non, orientée ou non. Ainsi dans notre contexte, G désignera un groupe de Lie compact agissant sur X; une variété de dimension n. On va procéder comme suit:

- définir une concaténation naturelle entre APMF par:

$$\begin{array}{rcll} \mu(s_1,s_2)(A,B)(t) & = & s_1(A,B)(t) & \text{if } 0 \le t \le \frac{1}{2} \ ; \\ & = & s_1(A,B)(3t-1) & \text{if } \frac{1}{2} \le t \le \frac{2}{3} \\ & = & s_2(A,B)(3t-2) & \text{if } \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{array}$$

- remarquer que deux APMF sont composables si et seulement si ils ont deux points de base en commun;
- définir l'application bi-évaluation $\begin{array}{rccc} ev \ : & \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X) & \longrightarrow & X^2 \\ & s & \longmapsto & (s(-,-)(0), s(-,-)(1/2)) \end{array}$ pour relier les simplexes de $\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)$ à ceux de X^2;
- munir X^2 d'une carte $\mathcal{A}$;
- dire qu'un simplexe $\Sigma : \Delta^i \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)$ est élémentaire quand $\sigma := ev(\Sigma) : \Delta^i \longrightarrow X^2$ l'est: il existe $U(\sigma) \in \mathcal{A}$ tel que $\sigma(\Delta^i) \subset U(\sigma)$, $U(\sigma)$ est alors choisie une fois pour toute;
- dire qu'un bi-simplexe $\Sigma \times \Gamma : \Delta^i \times \Delta^j \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X) \times \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)$ est élémentaire quand $\sigma = ev(\Sigma) : \Delta^i \longrightarrow X^2$ et $\gamma = ev(\Gamma) : \Delta^j \longrightarrow X^2$ le sont tous les deux;
- dire qu'un élémentaire bi-simplexe $\Sigma \times \Gamma$ est transverse quand le bi-simplexe $\sigma \times \gamma$ et toutes ses faces sont transverses dans X^2 à l'application diagonale Δ_{X^2}[32];
- poser dans ce cas $W := ev(\Sigma \times \Gamma)^{-1}(\Delta_{X^2})$;
- utiliser le diagramme

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] & \Delta^i \times \Delta^j \arrow[r, "\Sigma\times\Gamma"] \arrow[dr, "\sigma\times\gamma"'] & \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X) \times \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X) \arrow[d, "ev\times ev"] & \\ & & X^2 \times X^2 & \Delta_{X^2} \sim X^2 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

pour montrer que W est une sous-variété de $\Delta^i \times \Delta^j$, orientée et de dimension $(i+j-2n)$;

[31] F. Laudenbach, *A note on the Chas-Sullivan product*, L'Enseignement Mathématique, Vol. **57**, Issue 1-2 (2011), 3-21.

[32] Deux application $f, g : X \longrightarrow Y$ sont dites transverse quand leurs images respectives sont transverses dans Y

- utiliser le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, dash] & (s_1,s_2) \arrow[d, dash] & \mu(s_1,s_2) \arrow[d, dash] \\
W \arrow[r, "\Sigma\times\Gamma"] \arrow[dr, "\sigma\times\gamma"'] & \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)\times\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "ev\times ev"] & \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X) \\
 & \Delta_{X^2} \arrow[d, dash] & \\
 & (s_1(-,-)(0), s_1(-,-)(1/2), s_2(-,-)(0), s_2(-,-)(1/2)) &
\end{tikzcd}
$$

  pour montrer que tout $x \in W$, les APMF $(s_1, s_2) := (\Sigma \times \Gamma)(x)$ ont deux points de base en commun, donc composables;

- définir le produit d'intersection de Σ et Γ par

$$\Sigma.\Gamma := \mu((\Sigma \times \Gamma)_{|W}) : \Delta^{i+j-2n} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X);$$

- définir un opérateur de bord au niveau des simplexe de $\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)$ par $\partial\Sigma := \sum_{k=0}^{i} \varepsilon_k(-1)^k F_k\Sigma;$[33]
- associer à cet opérateur l'homologie à coefficients entiers, notée $H_*(X; \partial)$;
- montrer que tout bi-simplexe peut être représenté (à homotopie près) par un bi-simplexe transverse et ceci indépendamment du choix du représentant de la classe homologique;
- définir le string produit sur $H_*(X; \partial)$ par $[\Sigma] \bullet [\Gamma] := [\Sigma.\Gamma]$;
- poser $\mathbb{H}_*(\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X)) := H_{*+2n}(\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X), \partial)$ et montrer que $\bullet$ induit sur $\mathbb{H}_*(\mathcal{M}_{\mathrm{LP}}(X))$ une structure d'algèbre graduée associative et commutative.

[33]ici ε_k désigne le signe du Jacobian dû au changement de variables $U(ev(F_k\Sigma)) \longrightarrow U(ev(\Sigma))$, où F_k désigne l'application $k$ème face.

2.3 Exposés

2.3.1 Février 2012: Beyrouth, Liban

Géométrie sous-riemannienne[34] était une école CIMPA organisée en février 2012 à Beyrouth au Liban. Son objectif essentiel était de présenter la géométrie sous-riemannienne comme point de rencontre de différents domaines de recherche. Les cours étaient soit introductifs, soit spécialisés dans d'autres domaines de recherche; notamment le transport optimal, la théorie du contrôle, la mécanique non-holonome, les distributions de Cartan dans les espaces de jets, les opérateurs hypoelliptiques et la géométrie algébrique.

Des exposés sur des thèmes connexes étaient également organisés, et c'est dans ce sens que j'ai donné un exposé intitulé "A conjecture in Rational Homotopy Theory"[35]. Dans cet exposé, très bien accueilli par l'audience, j'ai présenté nos résultats sur la conjecture de Hilali pour les variétés symplectiques ou cosymplectiques et pour les nilvariétés. J'ai aussi survolé des problèmes ouverts en homotopie rationnelle proposant de résoudre des conjectures célèbres en géométrie Riemannienne, tels la conjecture de Bott ou celle de Hopf[36] [37] [38].

2.3.2 Juin 2013: Luxembourg

Higher Algebras and Lie-infinity Homotopy Theory[39] était un workshop dont le but principal était d'explorer les récents travaux dans ce domaine de recherche. Il comprenait aussi un mini-cours sur les L_∞ algèbres et leur utilisation en théorie d'homotopie rationnelle; sujet récemment développé qui étend les travaux de D. Sullivan et D. Quillen aux espaces topologiques non simplement connexes.

Mon exposé[40] portait encore une fois sur la conjecture de Hilali. Ainsi, j'ai survolé les derniers résultats obtenus, j'ai proposé des axes de recherche et j'ai présenté une idée pour lier la conjecture de Hilali à celle de S. Halperin; la fameuse conjecture du rang torique. Ces idées feront dans la suite objet de notre article accepté [**BHM**].

2.3.3 Février 2015: Lisbonne, Portugal

Oporto Meeting on Geometry, Topology and Physics[41] est une rencontre annuelle entre mathématiciens et physiciens intéressés par des échanges scientifiques sur un thème

[34] http://cimpa-icpam.org/archivesecoles/20120703110805/index.html

[35] http://myismail.net/docs/doctorat/exposes/MamouniBeyrouth2012Bis.pdf

[36] D. Sullivan, M. Vigué-Poirrier, The homology theory of the closed geodesic problem, J. Differential Geom. Volume 11, Number 4 (1976), 633-644.

[37] K. Grove, S. Halperin et M. Vigué-Poirrier, The rational homotopy theory of certain path-spaces with applications to geodesics, Acta math., 14,0 (1978), 277-303.

[38] K. Grove, S. Halperin, Contributions of rational homotopy theory to global problems in geometry, Publications Mathématiques de L'IHÉS, Volume 56, Number 1, 171-177.

[39] https://sites.google.com/site/higheralgebras2013/

[40] http://myismail.net/docs/doctorat/exposes/2013/Mamouni-Lux13.pdf

[41] http://cmup.fc.up.pt/cmup/omgtp/2015/

principal fixe pour chaque édition. Celui de l'édition 2015 portait sur les applications de la topologie en robotique, en analyse des données, en informatique théorique, ... Le programme comprenait des mini-cours (topologie robotique, persistent homology) complétés par des exposés de recherche.

Le mien portait sur deux axes: le comportement topologique des APM et la notion d'APMF. C'était l'occasion de finaliser et de soumettre les travaux [**DM1**]-[**DM2**] sur les APM et de réflichir pour la première fois à étendre la notion d'APMF et définir la notion de string topologie robotique[**DM3**].

2.3.4 Mai 2015: Pennsylvanie, USA

Lehigh University Geometry and Topology Conference[42] était un événement scientifique organisé à Bethlehem en Pennsylvanie (USA) pour célébrer le 70ème anniversaire du professeur Don Davis. Les exposés étaient très variés et portaient sur des thèmes d'actualité en topologie ou géométrie. Le niveau scientifique était trés haut comme le montre la qualité de l'audience présente (D. Sullivan, J. Stasheff, M. Farber entre autres). C'était pour moi l'occasion de présenter notre idée de marier les deux théories de string topologie et topologie robotique. Mon exposé devant les fondateurs de ces théories (D. Sullivan et M. Farber) a été très bien accueilli et suivi de plusieurs discussions. Ça a été une opportunité unique pour finaliser notre travail[**DM3**].

[42]http://www.lehigh.edu/ dlj0/geotop.html

2.4 Événements scientifiques: Participation

En plus des événements scientifiques cités ci-dessus, et où j'ai présenté mes travaux de recherche, j'ai participé à d'autres événements dédiés à des thèmes en géométrie; différentielle ou algébrique.

2.4.1 Août 2011: Regensburg, Allemange

Summer School on Rigidity and the Conjecture of Friedlander and Milnor[43] était une école d'été destinée aux étudiants et chercheurs intéressés par les travaux récents (à l'époque) de F. Morel sur la conjecture de Friedlander-Milnor. Le programme comportait des cours de niveau basique en géométrie algébrique et homotopie simpliciale, mais aussi des exposés de travaux sur la conjecture de Friedlander-Milnor.

2.4.2 Octobre 2011: Casablanca, Maroc

Journées de Géométrie, Topologie et Systèmes dynamiques[44] étaient des journées CIMPA organisées par le GGTM, Groupement pour le développement de la Géométrie et la Topologie au Maghreb, qui se propose de participer à la promotion de la recherche mathématique en géométrie et en topologie dans les pays du Maghreb.[45]. Le programme comportait des mini-cours introductifs sur la cohomologie de de Rham, la topologie symplectique et la théorie de la déformation en géométrie. Sont programmés aussi des exposés ou communications de travaux de recherche.

2.4.3 Juin 2012: Meknès, Maroc

Géométrie symplectique et topologie géométrique[46] était une école CIMPA dont le but était de permettre aux jeunes chercheurs d'acquérir les principales notions en géométrie symplectique et en topologie de petite dimension. Le programme comportait des mini-cours introductifs et des exposés de recherche en géométrie symplectique, en topologie de contact d'une part, et en théorie des noeuds ou en topologie des variétés de basse dimension d'autre part, notamment en homologie de Floer.

2.4.4 Juillet 2012: Utrecht, Pays Bas

Poisson 2012[47] était une école d'été visant à introduire aux participants la géométrie de Poisson et ses domaines connexes. Les conférenciers ont présenté aussi les développements les plus récents et problèmes ouverts dans le domaine. L'école ciblant les étudiants, les doctorants et les jeunes chercheurs. Le programme consistait en une semaine

[43]http://www-app.uni-regensburg.de/Fakultaeten/MAT/GK/index.php/Summer_School_Rigidity
[44]http://www.ggtm.univcasa.ma/journees-Casa.php
[45]http://www.ggtm.uh2c.ma/
[46]http://cimpa-icpam.org/archivesecoles/20130131114212/index.html
[47]http://www.projects.science.uu.nl/poisson2012/Home.php

de 4 mini-cours (Global Aspects, Symplectic Geometry, Lie Groupoids, Cluster Algebras) suivie d'une autre semaine de conférences.

2.4.5 Mai 2013: Nantes, France

Conference in Algebra and Topology[48] célébrait le 60ème anniversaire de Lionel Schawrtz. Le programme était sous forme d'exposés de recherche diversifiés et d'actualité; celui de S. Theriault de l'université de Southampton en particulier a attiré mon attention. Et suite à une discussion avec Jean Claude Thomas de l'université d'Angers, présent sur place, je me suis décidé d'étudier la conjecture de S. Theriault sous un angle de l'homotopie rationnelle. Deux ans après, on est arrivé à résoudre cette conjecture[**BM**] dans un contexte d'homotopie rationnelle.

2.4.6 Octobre 2013: Angers, France

Le groupement de recherche GDR 2875[49] regroupe des équipes en France travaillant dans les sujets classiques de la topologie algébrique et de l'algèbre homologique, comme la théorie de l'homotopie, l'homologie des groupes et la K-théorie, la théorie des déformations, et sur des thématiques plus récentes représentants des interactions de la topologie avec d'autres domaines des mathématiques, telles les catégories supérieures, l'homotopie motivique, la topologie des cordes. Son colloque est une réunion annuelle dont le but général est de réunir des mathématiciens débutants et des chercheurs confirmés travaillant dans ce domaine. Le programme de l'édition 2013[50] comprenait, en plus des exposés de recherche, un mini-cours sur les groupes fondamentaux de variétés algébriques complexes.

2.4.7 Juin 2013: Dubrovnik, Croatie

Manifolds, K-theory, and Related Topics[51] célébrait Tom Goodwillie pour son 60ème anniversaire. Ce dernier a apporté des contributions fondamentales soit en topologie algébrique soit en géométrique topologique. Ses idées ont été particulièrement influentes dans l'étude des variétés lisses en K-théorie algébrique ou en théorie de l'homotopie. L'objectif de cette conférence était de rassembler des chercheurs de pointe pour faire état sur les derniers développements importants dans ces domaines. Celui de Gunnar Carlsson de l'université de Stanford, fondateur en 2008 de l'homologie persistante, a particulièrement attiré mon attention.

l'homologie persistante est une théorie de l'homologie orientée calcul dans l'analyse de données à l'aide de code barres. Elle garde la trace des classes d'homologie qui restent 'persistantes' lorsque l'image approximative d'un espace est raffiné par des résolutions

[48]http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/ LS60/
[49]https://indico.math.cnrs.fr/
[50]https://indico.math.cnrs.fr/event/24/
[51]https://sites.google.com/a/wellesley.edu/dubrovnik-topology-2014/

plus élevées. Elle trouve beaucoup d'applications notamment en médecine dans le suivi de cancers. J'envisage d'étudier cette théorie dès la rentrée 2015.

2.4.8 Août 2014: Fribourg, Allemagne

L'objectif de l'école d'été Derivators[52] était d'introduire le formalisme des dérivateurs tel que construit par Grothendieck, Heller et d'autres dont l'approche, puissante et élégante, englobait la théorie des catégories triangulées et celle des foncteurs dérivés. Le programme comportait 3 mini-cours le matin suivis de sessions d'exercices et de discussion l'après midi.

2.4.9 Septembre 2014: Regensburg, Allemagne

Modular Invariants in Topology and Analysis[53] avait rassemblé des chercheurs confirmés en K-theory pour faire le point sur l'état de recherche sur les invariants modulaires comme les formes modulaires géométriques, les opérateurs de Dirac, les vertex operators, ...

Mon de fin pour clore cette section est que ma participation à toutes ces écoles ou conférences n'est pas aléatoire, mais s'inscrit dans un projet de recherche personnel, celui d'immigrer en 2017-2018 vers un autre domaine de recherche; la géométrique algébrique pure et appliquée.

[52] https://www.gk1821.uni-freiburg.de/event/summerschool/school-derivators-folder/school-derivators

[53] http://www-cgi.uni-regensburg.de/Fakultaeten/MAT/sfb-higher-invariants/index.php/Modular_Invariants_in_Topol

2.5 Événements scientifiques: Organisation

2.5.1 Séminaires

Mon groupe de recherche en topologie algébrique fondé en décembre 2011 organise depuis son séminaire mensuel[54]. C'est un espace d'échange et de discussion entre les membres du groupe; 7 doctorants et 3 professeurs. Les premiers exposaient l'avancement de leurs recherches, les seconds proposaient des cours complémentaires pour répondre aux besoins exprimés par les doctorants.

Le séminaire connaît une participation régulière de 10 personnes en moyenne, qui est passée à une vingtaine en 2015 suite à la participation d'étudiants de Master. Je m'occupe en particulier de préparer et appliquer le programme annuel, concevoir les affiches, mettre à jour la page web, arrêter la liste des participants, préparer les attestations de participation ou de communication, ...

2.5.2 Écoles

Depuis 2011[55] j'organise régulièrement l'école de recherche GeToPhyMa[56] à l'Université Internationale de Rabat et depuis l'édition 2012 j'ai impliqué mon établissement, le CRMEF de Rabat, dans l'organisation.

La première édition de 2011 a été très modeste: une demi-journée d'exposés de mathématiciens et de physiciens marocains suivis d'un déjeuner débat. Les 20 participants ont bien apprécié l'idée de regrouper des mathématiciens et physiciens autour d'un thème bien déterminé en géométrie ou topologie, et ont recommandé d'organiser régulièrement cet événement.

L'édition 2012 a connu pour la premières fois la participation de conférenciers et de participants étrangers. L'école était programmée sur 2 jours et la majorité des exposés étaient autour de la théorie des nœuds.

L'édition 2013 étalée sur 3 jours et dédiée à la mémoire de Jean Louis Loday (1946-2012), a connu un changement de base. Ainsi ont été programmés:

- 3 mini cours: opérades, topologie robotique et TQFT;
- des conférences satellites et publiques à Casablanca et à Meknès de John McCleary de Vassar College (USA) sur l'histoire des mathématiques ;
- des communications et des posters des travaux de recherche de jeunes chercheurs.

L'édition 2014[57] était organisée dans le même esprit que celui de 2013. Le programme, étalé sur 4 jours et dédié à la mémoire de Bill William Thurston (1946-2012), consistait en:

[54] http://www.algtop.net/seminaire/
[55] http://www.algtop.net/colloques/
[56] Géométrie et Topologie en Physique Mathématiques
[57] http://algtop.net/geto14/

- 3 mini-cours: Moduli spaces, configuration spaces et Spherical and hyperbolic geometry;
- des conférences satellites et publiques à Marakech, Meknes et Casablanca de William Goldman de l'université de Maryland (USA) et de Arnfinn Laudal de l'université d'Oslo (Norvège) sur l'interaction géométrie-topologie en physique;
- une vidéo-conférence de Jim Stasheff de l'université de la Caroline du nord (USA) sur les moduli spaces;
- des communications et des posters des travaux de recherche de jeunes chercheurs.

Après le succès retenti de l'édition 2014, on a décidé de passer d'une école annuelle à une école bi-annuelle. Ainsi on aurait assez de temps pour bien préparer les prochaines éditions dans les normes et standards internationaux. L'édition 2016[58] connaîtra l'apogée de GeToPhyMa. Étalée sur 10 jours, GeToPhyMa-2016 va célébrer Jim Stasheff et Dennis Sullivan pour leurs 80ème et 75ème anniversaires. Sous le slogan "Rational Homotopy Theory and its Interactions", le programme va comprendre:

- 6 mini-cours assurés par 14 conférenciers;
- des sessions d'exercices et de discussion;
- une vidéo-conférence de Jim Stasheff et Dennis Sullivan;
- des communications et des posters des travaux de recherche de jeunes chercheurs;
- des visites guidées pour les villes de Rabat, Casablanca, Kenitra, Meknès, Fez, Ifrane, Khenifra.

Enfin, signalons que le succès de GeToPhyMa ne serait possible sans le soutien financier et logistique de l'Université Internationale de Rabat, mais aussi celui scientifique d'éminent professeurs. Je cite entre autres Mohamed Boucetta de l'université de Marakech pour GeToPhyMa-2011, Hamid Abchir de l'EST de Casablanca pour GeToPhyMa-2011, de Bruno Vallette de l'université de Nice pour GeToPhyMa-2013, de Jim Stasheff de l'université de la Caroline du nord (USA) pour GeToPhyMa-2014 et enfin de Antonio Viruel de l'université de Malaga (Espagne) pour l'édition 2016.

Le tableau ci dessous donne des indices sur l'évolution de GeToPhyMa d'une simple demi-journée de conférences à une grande école internationale de 10 jours.

Édition	Durée	Conférenciers	Étrangers	Participants	Étrangers	Budget
2011	1/2 journée	4	0	20	0	5000 Dhs
2012	2 jours	5	3	30	4	20000 Dhs
2013	3 jours	8	4	40	10	60000 Dhs
2014	4 jours	11	10	60	20	130000 Dhs
2016	10 jours	23	18	70	40	240000 Dhs

[58]http://algtop.net/geto16/

Les attestations de participation ou d'organisation de ces manifestations sont rassemblées dans l'Annexe III.

3

Volet Pédagogique

3.1 Enseignement

3.1.1 1995-2013: Mathématiques générales en Classes Prépas

Mon expérience en enseignement a commencé en 1995 suite à ma réussite au concours de sortie de l'Agrégation. Depuis j'enseignai les mathématiques générales (analyse, algèbre et géométrie) en Classes Prépas. Mon cours s'adressait à des bacheliers inscrits dans une formation de 2 années de préparation aux concours d'entrée aux grandes écoles d'ingénieurs marocaines et françaises. Mon service hebdomadaire comprenait 10 heures de cours, 2 heures de TD, 4 heures de colles et 2 heures d'encadrement de projets de TIPE. S'ajoute à ceci des devoirs surveillés (rédaction, surveillance et correction) et des séances de préparation aux concours. Le contenu de la formation est détaillé dans l'Annexe II: Enseignement.

3.1.2 2011-Présent: Didactique des Mathématiques au CRMEF

Suite à ma réussite en 2011 au concours de recrutement de PESA au CRMEF de Rabat et étant diplômé en 2009 d'un Master 1 en sciences de l'éducation à l'université de Rouen (France), je fût chargé d'enseigner la didactique des mathématiques au CRMEF de Rabat. Mon cours s'adresse à des licenciés en mathématiques inscrits dans une formation d'une année de futurs enseignants de mathématiques aux lycées. Mon service annuel comprenait 3 modules chacun de 34 heures: planification des apprentissages, leur gestion et leur évaluation. Depuis la rentrée 2014, j'interviens à raison de 17 heures par module dans deux autres modules; à savoir les TICE et la méthodologie de recherche. J'encadre en plus les professeurs stagiaires dans leurs mémoires pédagogiques de fin de formation et dans leurs stages d'insertion professionnelle aux lycées. Le contenu de la formation est détaillé dans l'Annexe II: Enseignement.

3.1.3 2013-Présent: Géométrie en Agrégation

La préparation en deux ans au concours d'Agrégation dans sa nouvelle formule 2013 est ouverte au titulaires de Master en mathématiques ou équivalent. J'assure depuis, un module de 20 heures en géométrie affine et projective et un autre de 20 heures en didactique des mathématiques. J'encadre aussi les agrégatifs dans leur préparation et exposés de leçons. Le contenu de la formation est détaillé dans l'Annexe II: Enseignement.

3.1.4 2014-Présent: Topologie algébrique et robotique en Master

En 2014, la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca ouvre un Master recherche en mathématiques fondamentales intitulé "Topologie Algébrique et Applications à la Robotique" et coordonné par le professeur Mohamed Rachid Hilali. L'objectif de ce Master est de donner aux étudiants une formation de qualité dans les disciplines de la topologie algébrique et de la géométrie faisant l'objet des recherches actuelles dans les domaines de la recherche fondamentale en Mathématiques, de la Physique Mathématique et de la topologie robotique. En plus de l'encadrement de quelques étudiants dans leur mémoires de Master, j'assure 45 heures de cours et TD dans chacun des 3 modules: Topologie algébriques 3, homotopie rationnelle 2 et topologie robotique. Le contenu de la formation est détaillé dans l'Annexe II: Enseignement.

3.2 Communications pédagogiques

L'Association de Recherche sur la Pédagogie et l'Enseignement des Mathématiques (ARPEM) a organisé à Agadir en mai 2011 son 1èr colloque[1] sur l'enseignement des mathématiques et pédagogie de l'intégration. Ce colloque s'inscrivait dans la logique des réformes que connaissait à l'époque l'enseignement des mathématiques et particulièrement au sein de la pédagogie d'intégration qui a mobilisé plus d'un ministère de l'éducation. Il avait pour vocation d'approfondir l'apport et les retombées de cette approche adoptée officiellement par le ministère de l'éducation nationale de l'époque.

Notre exposé[2] "Évaluation de la réforme de l'année 2008 concernant l'enseignement des mathématiques aux classes préparatoires marocaines" s'inscrivait dans cette logique et se veut comme une évaluation de l'apport de la pédagogie de l'intégration sur les réforme des programme qu'a connu les Classes Prépas en 2008.

Fort d'une double expérience, participation aux comités de rédaction de ces nouveaux programmes et application sur le terrain des dit programmes, nous avons conclu que cette réforme a apporté une amélioration relative, mais qui demeure insuffisante. Nous avons proposé d'instaurer des commissions scientifiques permanentes dont le but serait d'élaborer progressivement des programmes parfaitement étudiés qui répondent aux exigences des Classes Prépas mais aussi à l'ouverture d'esprit et à la richesse de culture que nécessitent les métiers d'ingénieurs.

Les détails de cette communication sont sur l'Annexe III: Pédagogie.

3.3 Organisation de journées pédagogiques

En étroite collaboration avec le professeur Hassane Squalli de l'université de Sherbrooke (Québec, Canada) j'ai organisé[3] au CRMEF de Rabat des journées de réflexion sur la didactique des mathématiques et une école de formation à la recherche en didactique des mathématiques.

La première journée fût organisée le 23 Avril 2013 en partenariat avec l'Académie régionale Rabat du ministère de l'Éducation Nationale sous le thème "Perfectionnement des compétences professionnelles d'enseignement de formation et de recherche pédagogique". Le programme, qui comprenait 3 conférences de Hassane Squalli suivies de tables rondes, était destiné à une audience trés variée; des formateurs au CRMEF de Rabat, des enseignants ou inspecteurs de mathématiques aux lycées de la région de Rabat. L'objectif était de sensibiliser les participants à l'importance de la recherche en didactique des mathématiques et combler le vide dans le domaine au Maroc.

Suite à la demande exprimée par une grande majorité des participants, une deuxième journée a été organisée le 14 décembre 2013 sous le thème "Recherche et Formation

[1] http://crempi11.orgfree.com/index.html
[2] http://myismail.net/docs/ScEducation/Conferences/Agadir2011/EvaluationProgCPGE.pdf
[3] http://myismail.net/mes-activites/sciences-de-l-education/conferences-organisation

aux CRMEF: Complémentarité et Solidarité pour une même finalité". A l'issue de cette rencontre les participants ont arrêtés les objectifs suivants:

- créer des noyaux de réflexion et de recherche sur des sujets d'actualité en didactique des mathématiques;
- former des cellules d'action et de contact pour promouvoir la recherche en didactique des mathématiques aux CRMEF;
- former des noyaux de réflexion et de suivi de l'enseignement des mathématiques aux CRMEF.

Enfin en Juin 2014, j'organise une école[4] de formation à la didactique des mathématiques. L'école destinée aux enseignants chercheurs de mathématiques aux CRMEF du Maroc, était étalée sur 3 jours et animée par les professeurs Ouahidi My Mohamed de l'ENS de Rabat (Maroc) et Squalli Hassane de l'université de Sherbrooke (Canada). Un imprévu de dernière minute empêcha Antoine Bodin de l'université de Marseille (France) de co-animer cette école organisée en partenariat avec le CNRST et le ministère de l'Éducation Nationale sous le thème "Recherche et Formation, pilier fondamentale de la qualité d'enseignement".

Des suites de cette école sont prévues en 2016, notamment une 2ème école et un proceeding et on peut affirmer que les objectifs ci dessous semblent être atteints:

- créer un espace d'échange pour les chercheurs marocains en didactiques des mathématique pour communiquer et publier leurs travaux de recherche;
- créer un espace d'initiation à la recherche en didactique des mathématiques;
- créer un espace de complément de formation pour les formateurs aux CRMEF intéressés par l'enseignement des modules de didactique des mathématique.

Plus de détails sur ces rencontres sont dans l'Annexe III: Pédagogie

[4]https://sites.google.com/site/edm062014/

4

Encadrement

4.1 Doctorants

Mon groupe de recherche comprend 7 doctorants: 4 inscrits avec le professeur Mohamed Rachid Hilali de la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca et 3 inscrits avec le professeur Youssef Rami de la faculté des sciences de Meknes.

En témoigne les travaux [**BM**], [**BHM**],[**DM1**], [**DM2**], [**DM3**], [**HMT**], [**HMY1**] et [**HMY2**], j'ai participé à l'encadrement scientifique de 4 d'entre eux:

- Badr Ben El Krafi, Hicham Yamoul et Jawad Tarik dans le groupe de M.R. Hilali;
- Younes Derfoufi dans le groupe de Y. Rami.

Mon co-encadrement consiste en un suivi scientifique des travaux, notamment des sessions de discussions, des réponses aux questions, exploration de pistes de recherche, rédaction des articles et suivi de leurs soumissions. Le fruit en est que la soutenance des doctorants de M.R. Hilali est prévue en 2016 (sous réserve d'acceptation d'un article pour J. Tarik).

4.2 Étudiants en Master

2016 sera la première promotion du Master TAAR à la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca; par l'occasion j'envisage d'encadrer en mémoires:

- 2 étudiants en homotopie rationnelle sur la conjecture du rang torique de Halperin;
- 2 étudiants en topologie robotique sur la conjecture de Iwase-Sakai;
- 2 étudiants en homologie persistante.

La conjecture de Halperin prédit que tout espace topologique elliptique vérifie

$$\dim H^*(X;\mathbb{Q}) \geq 2^{\mathrm{rk}(X)}.$$

Ici $\mathrm{rk}(X)$ désigne le rang torique de X, défini comme étant le plus petit entier k (ou l'infini) tel que le tore T^k agit presque librement sur X. Celle de Iwase-Sakai conjecture que $\mathrm{TC} = \mathrm{TC}^S$ où TC^S désigne la version symetrique de la complexité topologique introduite par N. Iwase et M. Sakai dans [1] et étudiée dans [2].

Les étudiants dans les deux premiers projets seront amenés à se documenter sur les travaux effectués, comprendre les démonstrations et éventuellement proposer des pistes de recherche. Pour le 3ème projet, la recherche sera plutôt une documentation sur la théorie et éventuellement explorer des idées ou pistes de recherche.

4.3 Mémoires pédagogiques au CRMEF

La formation d'enseignants aux CRMEF exige que ces derniers préparent un mémoire pédagogique de fin de formation. Le travail consiste en une action-recherche sur le terrain pour apporter des solutions pédagogiques, didactiques,... à une problématique donnée.

La recherche-action est un processus qui aide les enseignants à se doter des moyens propres à améliorer leur pratique et à réfléchir sur leur pédagogie. La recherche-action permet en effet au praticien, tout en restant en contact avec le terrain, d'apprendre à identifier ses besoins et d'établir une démarche pour atteindre des objectifs de changement. Elle favorise également une meilleure appréciation de ses interventions en classe.

Ci dessous la liste des sujets que j'ai encadré au CRMEF de Rabat, depuis 2011:

- 2011-2012:
  - Les critères d'un enseignement de qualité;
  - La mise en pratique sous SPSS des méthodes statistiques uni et bi-dimensionnelle.

[1] N. Iwase, M. Sakai, *Topological complexity is a fibrewise L-S category*, Topology and its Appl., vol **157**, no. 1 (2010), 10 -21.

[2] N. Iwase, M. Sakai, Erratum to *Topological complexity is a fibrewise L-S category*, Topology and its Appl., vol. **159**, no 10-11 (2012), 2810-2813.

- 2012-2013:
  - Être un stagiaire aux CRMEF;
  - Les équations algébriques: à travers l'histoire et dans les manuels scolaires;
  - Difficultés en mathématiques des élèves en tronc commun;
  - L'évaluation et différentes modes de correction.
- 2013-2014:
  - Les difficultés d'apprentissage en Mathématiques;
  - Remédiation à l'Islam des fautes des élèves;
  - Rôle et qualité de l'enseignant pour un bon enseignement;
  - Difficultés d'apprentissage de la trigonométrie en Tronc Commun.
- 2014-2015:
  - Coaching scolaire;
  - Comprendre la personnalité de l'adolescent pour réussir les apprentissages;
  - La violence à l'école.

Un modèle de mémoire, celui sur le coaching scolaire, est dans l'Annexe IV: Encadrement.

4.4 Projets de TIPE en Classes Prépas

Selon les instructions officielles, les TIPE[3] ont pour objectif de développer les qualités et capacités suivantes : ouverture d'esprit, initiative personnelle, faculté de traiter un problème pluridisciplinaire, esprit critique, capacité d'exigence, d'approfondissement et de rigueur, aptitude à collecter l'information, l'analyser, la synthétiser, la communiquer. Chaque année, un thème assez général est proposé aux étudiants.

Les étudiants effectuent un travail de recherche personnel sur une question qu'ils peuvent relier au thème de l'année. C'est pour eux l'occasion de se former à la démarche scientifique, à poser correctement les questions avant de tenter d'y répondre, à rechercher des compromis, comme le font couramment les scientifiques ou les ingénieurs.

Afin de parvenir à ces objectifs, les étudiants, encadrés par leurs professeurs, développeront des activités et des démarches diverses:

- mise en évidence et formulation d'un problème;
- recherche et exploitation d'une documentation;
- préparation et réalisation de dossiers et d'exposés;
- établissement d'un processus expérimental;

[3] Travaux d'Initiative Personnelle Encadrés

- développement d'arguments au cours d'un entretien scientifique;
- analyse et observation d'un phénomène ou d'un système industriel;
- utilisation d'outils théoriques et expérimentaux;
- examen et discussion de solutions et justifications de choix.

Dans ce sens je suis amené chaque année à encadrer la moitié de la classe; à savoir 18 étudiants par année, dans leur préparation des TIPE. Mon travail consiste à proposer des pistes de recherches, encadrer des mini-stages, des expériences ou mini-projets, corriger la rédaction, ...

Un modèle de support que je prépare chaque année pour mes étudiants est dans l'Annexe IV: Encadrement

5

Activités parallèles

5.1 Responsabilités collectives

5.1.1 Groupe de recherche

Membre associé de l'équipe algèbre et géométrie de la faculté des sciences de Meknes (responsable: Pr. Youssef Rami) et du laboratoire Topologie, Algèbre, Géométrie et Structures Discrètes de la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca et membre fondateur en 2011 du groupe de recherche en topologie algébrique[1] sont sans doute mes responsabilités collectives les plus importante. Le groupe de recherche MAAT comporte maintenant 3 professeurs chercheurs, 7 doctorants et une dizaine d'étudiants de Master qui assistent régulièrement aux séminaires mensuels. Ces séminaires qui se veulent un espace d'échange de discussion et d'encadrement, ont pour objectif principal d'aider les doctorants à avancer dans leurs travaux de recherche. On ne peux qu'en se féliciter du fruit de ce travail collectif: 4 articles publiés, 2 acceptés, 6 soumis et d'autres en progression. Enfin, des soutenances de doctorats sont prévues en 2016 pour 4 doctorants parmi 7.

En plus d'être membre fondateur, je m'occupai de tous les détails de communication du groupe:

- administration et mise à jour de la page web;
- planification annuelle des séminaires
- conception des affiches et posters;

[1] http://algtop.net

- édition des attestations de participations;
- rédaction des rapports d'activités.

Les différents rapports d'activités sont en Annexe V: Activités Collectives.

5.1.2 Associations

Mes activités associatives se répartissent sur 3 fronts, celui des professeurs agrégés, celui des chercheurs en didactique des mathématiques et enfin celui des chercheurs en topologie algébrique.

Ainsi en 2010, je fût à l'initiative avec d'autres collègues de créer une branche "Mathématiques" au sein de l'"Association Marocaine des Professeurs Agrégés". La branche s'est fixée deux objectifs généreux, à savoir:

- contribuer à l'amélioration de la qualité d'enseignement des mathématiques en Classes Prépas;
- méditer sur des sujets scientifiques et pédagogiques divers.

En un temps record 2010-2012, on a organisé divers activités; notamment:

- des journées coaching au profit des étudiants en Classes Prépas les aidant à gérer le stress de la préparation des concours. Les journées faisaient appel à des potentialités marocaines spécialiste dans le domaine. Nos journées ont fait le tour du Maroc, notamment Rabat, Salé, Casablanca, Fez et Agadir;
- des journées de formation au profit des enseignants d'informatique en Classes Prépas. Les objectifs de ces journées étaient entre autres; d'accompagner les professeurs d'informatique dans la préparation des étudiants à l'épreuve de l'informatique récemment introduite au CNC; de réfléchir sur l'enseignement de l'informatique en Classes Prépas en tant que discipline indépendante et son interaction avec les autres matières notamment scientifiques; d'initier des habitudes et règles de collaboration interdisciplinaires informatique-mathématiques-physique. Grâce au soutien du ministère de l'Education Nationale et d'un collectif d'associations on a pu organiser des journées à Rabat, Casablanca, Marrakech et Agadir, encadrées par des experts marocains et français. Le rapport détaillé de la dernière édition est dans l'Annexe V: Activités Collectives.

La branche a aussi édité une revue électronique et un annale de corrigés d'épreuves de concours. Les pages de garde sont dans l'Annexe VI: Activités Éditoriales.

Dans le 2ème front, celui des chercheurs en didactique des mathématiques, j'ai participé en 2013 à l'initiative de créer l'association "Observatoire Marocain des Systèmes d'Enseignement et de Formation à l'Enseignement des Mathématiques". On a organisé en 2014 la 1ère école de didactique des mathématiques. D'autres projets sont en cours de préparation.

Enfin en ce qui concerne le 3ème front des chercheurs en topologie algébrique nos efforts sont toujours en cours pour arriver à bout des démarches administratives et structurer notre groupe de recherche en association, la "Moroccan Area of Algebraic Topology".

5.2 Commissions spéciales

Mon implication dans des commissions spéciales se répartit sur 3 niveaux comme suit:

- Classes Prépas:
  - Commissions pédagogiques pour la réforme des programmes de mathématiques;
  - Commissions pédagogiques pour la réforme des programmes d'informatique;
  - Jurys pour le recrutement d'enseignants d'informatique.
- CRMEF:
  - Commissions pédagogiques pour la réforme des programmes;
  - Jurys des concours d'entrée et de sortie;
  - Conseil d'établissement du CRMEF de Rabat;
  - Commission pédagogique du CRMEF de Rabat;
  - Commission de recherche du CRMEF de Rabat.
- Agrégation:
  - Commissions pédagogiques pour la réforme des programmes;
  - Jurys des concours d'entrée.

5.3 Activité éditoriale

Les ouvrages que j'ai édité sont de nature

- personnelles: supports dédiés à mes étudiants comme des résumés de cours, des feuilles d'exercices ou des problèmes corrigés;
- collectives: revue, annales corrigés.

Dans l'Annexe VI: Activité Éditoriale est proposé quelques modèles ou des pages de garde.

6

Financement

Les financements et fonds que j'ai pu collecter durant la période 2011-2015 étaient à usage personnel pour couvrir les frais de ma participation à des rencontres à l'extérieur du Maroc, ou à usage collectif pour couvrir les frais des activités que j'ai organisé au Maroc (logement des participants et logement-transport des intervenants). Les tableaux ci dessous résument la nature de ces fonds et leur usage.

6.1 Usage personnel

Date	Lieu	Usage	Financé par	Montant en Dhs
Septembre 2015	Oxford (Angleterre)	Vol+Logement	Organisateurs	8 000
Mai 2015	USA	Vol+Logement	Organisateurs	10 000
Février 2015	Portugal	Vol+Logement	Organisateurs	6 000
Septembre 2014	Allemagne	Vol+Logement	Organisateurs	8 000
Août 2014	Allemagne	Vol+Logement	Organisateurs	8 000
Juin 2014	Croatie	Vol+Logement	Organisateurs	10 000
Octobre 2013	France	Vol+Logement	Organisateurs	7 000
Juin 2013	Luxembourg	Vol+Logement	Organisateurs	8 000
Mai 2013	France	Vol+Logement	Organisateurs	7 000
Juillet 2012	Pays Bas	Logement	Organisateurs	3 000
Février 2012	Liban	Vol+Logement	Organisateurs	5 000
Août 2011	Allemagne	Vol+Logement	Organisateurs	8 000
			Total	88 000

6.2 Usage collectif

Date	Lieu	Événement	Financé par	Montant en Dhs
Juillet 2016	Rabat	GeToPhyMa	UIR-CIMPA-CNRS MIMS-IMC(CDC)-Clay Inst.	190 000
Juin 2014	Rabat	GeToPhyMa	UIR-CIMPA-CNRS CNRST-MIMS-IMC(CDC)	130 000
Juin 2014	Rabat	École didactique	MEN-CNRST	40 000
Juin 2013	Rabat	GeToPhyMa	UIR-RAM	60 000
Avril 2013	Rabat	Journée didactique	CRMEF Rabat	5 000
Juin 2012	Rabat	GeToPhyMa	UIR	20 000
Mai 2011	Agadir	Journées Formation	MEN-Associations	100 000
Mars 2011	Rabat	GeToPhyMa	UIR	5 000
Février 2011	Agadir	Journée Coaching	Associations	40 000
			Total	590 000

7

Horizons et Perspectives

7.1 Recherche en topologie algébrique pure

Une fois habilité à diriger des recherches en mathématiques, je compte encadrer à partir de la rentrée 2016 un(e) doctorant(e) issu(e) de la promotion 2016 du master TAAR de la faculté des sciences de Ain Chock de Casablanca. L'encadrement de ce thème en doctorat portera sur la conjecture du rang torique et sera une continuité naturelle d'un encadrement précédent en mémoire de Master.

En marge de ma participation en février 2015 à une conférence à Lisbonne en Portugal, des discussions ont été entamées avec Petar Pavešic (Université de Ljubljana, Slovénie) et Sadok Kallel (Université de Sharjah, Emirates) sur un projet de recherche dont l'objectif sera de relier plusieurs invariants qui semblent de même nature : LS-catégorie, co-catégorie, catégorie sectionnelle, ...

La 5ème édition GeToPhyMa[1] sera tenue en Juillet 2016 sur le thème "Rational Homotopy Theory and its Interactions" et va célébrer Jim Stasheff et Dennis Sullivan pour leurs respectifs 80ème et 75ème anniversaires. Cette école est adressé aux étudiants de Master et les jeunes chercheurs en géométrie, topologie et la physique mathématique. Les chercheurs spécialisés dans d'autres domaines peuvent profiter des conférences d'introduction, et sont chaleureusement invités à se joindre à l'École.

L'objectif principal est de fournir aux participants une solide base dans la topologie algébrique, et plus spécifiquement en théorie de l'homotopie rationnelle. Elle sera utilisé comme point de départ et cadre commun pour la présentation des thèmes de

[1]http://algtop.net/geto16/

recherche d'actualités, y compris les opérades, topologie des cordes, la topologie appliquée, et la géométrie algébrique. Nous avons prévu 30 heures de cours, 14 heures d'exercices ou/et de séances de discussion, et 6x20mn communications. Le premier cours d'introduction sur le sujet sera enseigné en français, tandis que les autres cours seront dispensés en anglais. Nous avons maximisé le nombre de conférenciers (17 au total) pour les mini-cours fournissant ainsi aux étudiants l'opportunité de nouer des liens avec des chercheurs confirmés avec qui ils peuvent construire dans un avenir proche une carrière de chercheur.

Je vais aussi co-organiser avec Yael Fregier (Lens, France) en mai 2016 une école à Méhdia, cela devrait à priori porter sur la thématique des invariants de nœuds, et les orateurs principaux envisagés sont Vaughan Jones (Berkeley, USA) et Alberto Cattaneo (Zurich, Suisse).

Des contacts sont en cours avec Yael Fregier pour intégrer un projet de réseau de Nikolai Reshetikin (Berkeley, USA) et Thomas Strobl (Lyon, France) qui veulent organiser un semestre thématique au MSRI sur les algèbres de factorisation et les recollement de théories de champs en physique et souhaitent donc intégrer à cela d'autres activités scientifiques sur la même thématique.

7.2 Recherche en topologie algébrique appliquée

Une fois habilité à diriger des recherches en mathématiques, je compte aussi encadrer à partir de la rentrée 2016 un(e) doctorant(e) issu(e) de la promotion 2016 du master TAAR de la faculté des sciences de Ain Chock de Casablanca. L'encadrement de ce thème en doctorat portera sur la conjecture de Iwase-Sakai et sera une continuité naturelle d'un encadrement précédent en mémoire de Master.

Au cours des dernières années, il y a eu une explosion de travaux de recherche et d'intérêts suscités par la topologie algébrique appliquée, et en particulier dans l'homologie persistante et ses applications à l'analyse des données. C'est une théorie sophistiquée en constante évolution combinant d'autres branches des sciences mathématiques, telles que les statistiques, la probabilité. Le calcul d'homologie persistante pour les grands ensembles de données reste un défi, mais plusieurs logiciels sont disponibles et ont été testés sur des vrais données expérimentales. Cela a conduit à des applications intéressantes dans des domaines allant du traitement d'image par ordinateur pour la médecine, l'analyse de données ou de la biologie cellulaire.

Suite à ma participation à une école de recherche tenue à Oxford (Angleterre)[2] en Septembre 2015, j'envisage à partir de la rentrée 2016 d'explorer un autre domaine de recherche ; celui de la "Persistent Homology". C'est un procédé de calcul développé en 2002 suite aux travaux de Gunnar Carlsson (Stanford, USA) et de Robert Ghrist (Penn University, USA) qui s'intéressaient aux caractéristiques topologiques d'un espace dans ses différentes résolutions spatiales. Le principe général repose sur l'idée de détecter des

[2] Computational Algebraic Topology, https://people.maths.ox.ac.uk/tillmann/CAT-SCHOOL.html

fonctionnalités persistants sur une large gamme de longueur (sous forme de codes barres) susceptibles de représenter les véritables caractéristiques topologiques de l'espace sous-jacent. Cette théorie fait appel à d'autres théories notamment, l'homologie simpliciale, la théorie de Morse, la théorie des graphes et des noueds, l'algorithmique, l'analyse des données, ... Elle trouve ses applications dans différents domaines, notamment : la structure atomique des matériaux, les polymères aléatoires (population de macromolécules), la médecine (traitement de l'expansion d'une mâchoire), l'agriculture des plantes (Connectivity of Root Systems), le traitement d'images (prévention de cancers), ...

7.3 Recherche en didactique des mathématiques

En étroite collaboration avec Hassane Squalli (Sherebrooke, Canada), un appel est lancée pour intégrer un réseau international de chercheurs en didactique des mathématiques dans le cadre de l'observatoire international de la pensée algébrique (OIPA). Cet appel s'adresse aux formateurs-chercheurs des CRMEF impliqués dans la formation des enseignants au primaire, collège ou lycées. L'équipe ainsi formée travaillera sous la coordination de Hassane Squalli et pourra prendre part aux différentes activités et événements scientifiques du réseau de chercheurs formateurs de l'OIPA, dont :

- Wébinaires : 5 sont prévus en 2015-2016 sous forme de séminaires à distance, par visioconférence; ce qui nécessite d'avoir accès à Internet et un casque d'écoute intégrant un micro idéalement). Les wébinaires commencent généralement vers 13h30 heure marocaine ;

- La réalisation d'études dans le contexte marocain; ces études seront réalisées dans plusieurs pays. Le protocole de recherche est préparé au sein de l'OIPA ;

- La contribution à des publications scientifiques coordonnées par l'OIPA : un appel de textes pour un numéro thématique d'une revue scientifique portant sur le développement de la pensée algébrique a été lancé en automne 2015 ;

- La participation à des colloques organisés par l'OIPA.

Une École de recherche en didactique des mathématiques est prévue à Rabat en mai-juin 2016. Cette école s'inscrit dans la continuité des initiatives visant le développement de la recherche en didactique des mathématiques au sein des CRMEF. Elle se situe dans le prolongement des deux journées et de la première école de didactique des mathématiques organisées par le CRMEF de Rabat (24 avril 2013, 15 décembre 2013, 10-14 juin 2014, respectivement). Elle vient enfin consolider la participation d'une équipe de formateurs-chercheurs des CRMEF à un réseau international de didacticiens de mathématiques.

Ses objectifs seront de :

- Permettre de prendre connaissance de problématiques récentes en lien avec la transition arithmétique-algèbre, des nouvelles orientations curriculaires au primaire et au secondaire qui y sont liées ainsi que des cadres théoriques permettant d'étudier ces problématiques ;
- Définir des projets de recherche et des protocoles méthodologiques pour les mener à terme ;
- Réfléchir à comment exploiter ces recherches dans la formation des enseignants.

Les travaux se dérouleront sous forme de présentations magistrales (cours) et d'ateliers de réflexion et de travail. Les cours porteront sur des cadres conceptuels ou méthodologiques. Pour favoriser la maîtrise des contenus des cours, un recueil de textes sera mis à disposition des participants avant le début de l'école de didactique. Chaque cours sera suivi d'un atelier pour discuter et mettre en pratique les contenus abordés dans les cours. D'autres ateliers serviront à l'élaboration de projets de recherches pouvant être conduits par les participants.

Enfin des journées de formation de 2 jours au profit des enseignants aux CRMEF sont prévues à Fes et à Marrakech sous le thème "Formation des enseignants à la Planification, la gestion et l'évaluation des apprentissages : Articulation des dimensions didactique et pédagogique". Le programme éventuel sera le suivant :

- **Jour 1 (matin)** : Formation des enseignants des mathématiques au CRMEF : quel modèle de formation ? Quel modèle de l'enseignant visons-nous ? Comme quelle position adopter entre prescription de la pratique et prescription de la théorie ? Quelle articulation entre la formation didactique et la formation pédagogique ? Quelle articulation entre la formation théorique et la formation pratique?
- **Jour 1 (après midi)** : Planification des apprentissages: théorie et pratique Quelle formation didactique? Quelle formation pédagogique? Quelle articulation entre la formation didactique et la formation pédagogique ?
- **Jour 2 (matin)** : Gestion des apprentissages: théorie et pratique, Quelle formation didactique? Quelle formation pédagogique? Quelle articulation entre la formation didactique et la formation pédagogique ?
- **Jour 2 (après midi)** :Évaluation des apprentissages: théorie et pratique Quelle formation didactique? Quelle formation pédagogique? Quelle articulation entre la formation didactique et la formation pédagogique ? Atelier 3 : Discussion des approches et contenus à retenir pour le module sur l'évaluation des apprentissages

Bilan de la formation et suites à donner.

A

Annexes

J'ai joint à ce rapport 7 annexes :

1. **Annexe I-Articles** : Il comporte l'ensemble de mes articles en topologie algébrique (pure ou appliquée) depuis 2011, au total 9, dont 2 publiés, 3 acceptés, 3 soumis et 1 en cours de révision.

2. **Annexe II-Enseignement** : Contient les contenus des programmes des cours que j'ai assuré depuis en 2011; à savoir analyse, algèbre et géométrie en Classes Prépas ; didactique des mathématiques, TICE et méthodologie de recherche au CRMEF de Rabat ; géométrie affine et projective en Agrégation et enfin topologie algébrique (pure et appliquée) en Master.

3. **Annexe III-Pédagogie** : Mes activités de recherche en didactique des mathématiques ; à savoir une communication et des rapports de 2 journées et une école en didactique des mathématiques que j'ai organisé.

4. **Annexe IV-Encadrement** : comporte les mémoires des étudiants que j'ai encadrés soit en Classes Prépas ou au CRMEF de Rabat ou que j'envisage d'encadrer en Master à la faculté des sciences Ain Chock de Casablanca.

5. **Annexe V-Activités** : comprend les rapports annuels d'activités de mon groupe de recherche et ceux des journées de formation de que j'ai organisé.

6. **Annexe VI-Edito** : comprend plus de 600 pages de polycopies de cours, de feuilles d'exercices, de corrigés d'annales et de revues que j'ai édité.

7. **Annexe VII-Attestations** : comprend les attestations justifiant mes activités citées dans ce rapport : participation à des conférences, communications, ...