My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Feuille d'exercices
ECT 1

Calcul Algébrique sur $\mathbb{R}$

Récurrence-Sommation

John Neper, 1550-1617

Théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais, issu d'une riche famille, lui-même baron connu par sa défense du protestantisme. Les mathématiques n'étaient pas son activité principale mais il ne manquait pas d'idées pour simplifier les calculs. Il établit quelques formules de trigonométrie sphérique, popularisa l'usage du point pour la notation anglo-saxonne des nombres décimaux mais surtout inventa les logarithmes.

Blaque du jour

- Logarithme et exponentielle vont boire un café. Au moment de régler l'addition, qui paye ? C'est l'Exponentielle, parce que le Logarithme ne paye rien.
- L'exponentielle et le logarithme décimal vont au cinéma, qui choisit le film ? l'exponentielle, car le logarithme décide mal.
- Les fonctions sont en fete dans un anniversaire, alors que tout le monde s'amuse comme un fou, exp reste tout seul dans son coin. Une belle x^2 lui lance : "allez exp te laisse pas aller, va les rejoindre " et exp de lui répondre "ça sert à rien ! de toute façon, même si je m'intègre, ça change rien"
- Les fonctions sont en croisière dans un bateau. Soudain une fonction terroriste surgit dans le bus et se met à menacer tout le monde avec comme armes une derivée et une intégrale : " Je vais vous intégrer ! Je vais vous dériver !!". Tout le monde est effrayé et saute en mer, sauf une jolie exponentielle qui reste tranquille. La fonction terroriste arrive vers elle et dit : " Tu n'as pas peur ? Je vais t'intégrer ! Je vais te dériver !!". Non répond la jeune exponentielle : "Non, je n'ai pas peur, je suis exponentielle !"

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Récurrence Faible

Exercice 1

- On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}.$$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant u_n < 1$.

UR Institut des Classes Préparatoires

Exercice 2

- Démontrer l'inégalité $2^n > n$ pour tout entier naturel n.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2n$ est un multiple de 7.

Exercice 3

- la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$ et
$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 2^n$.

Exercice 4

- la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$ et
$$u_{n+1} = u_n + 2.$$
   ❶ Donner la nature de la suite (u_n) et exprimer u_n en fonction de n.
   ❷ la suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par : $v_0 = 1$ et
$$v_{n+1} = v_v + u_n.$$
   Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n = 1 + n^2$.
- la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$ et
$$u_{n+1} = u_n + n.$$
Démontrez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$.
- la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_0 \in]0,1[$ et
$$u_{n+1} = u_n(2 - u_n).$$
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 1$.

1.2 Récurrence Forte

Exercice 1

- Soit la suite (u_n) définie comme suit : $u_0 = 2, u_1 = 3$ et
$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$
Montrez par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.
- Soit la suite (v_n) définie comme suit : $v_0 = v_1 = 1$ et
$$v_{n+1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$
Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geqslant 1, v_n = 2^{n-1}$.
- Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geqslant 1$, il existe p et q tels que $n = 2^p(2q + 1)$.

UR Institut des Classes Préparatoires

2 Sommes et Produits

Exercice 1

Montrer par récurrence les égalités suivantes :

❶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \ \forall n \geqslant 0$;

❷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ \forall n \geqslant 0$;

❸ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \ \forall n \geqslant 0$;

Exercice 2

Montrer par récurrence les égalités suivantes :

❶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}, \ \forall n \geqslant 0$;

❷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \ \forall n \geqslant 1$;

❸ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1), \ \forall n \geqslant 0$;

Exercice 3

Trouver une formule simplifiant le produit :

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

pour $n \geqslant 2$.

Exercice 4

Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$\prod_{k=1}^{n} (n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

3 Factorielles et Combinaisons

Exercice 1

Soit $n \geqslant 1$. Exprimer à l'aide des factorielles le produit

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

My Ismail Mamouni
myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Exercice 2

- Montrer par récurrence les égalités suivantes :

  ❶ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k! = (n+1)! - 1, \ \forall n \geqslant 0$;

  ❷ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, \ \forall n \geqslant 0.$

Exercice 3

- Calculer : $\dfrac{15!}{12!} = ?, \ \dfrac{600!}{598!} = ?, \ \dfrac{20!}{3!5!2!} = ?.$
- Calculer puis conclure :

  ❶ $(4.3)! = ?, \ 4.(3)! = ?, \ 4!.3! = ?$;

  ❷ $(4+3)! = ?, \ 4+3! = ?, \ 4!+3 = ?, \ 4!+3! = ?$;

Exercice 4

- Simplifier les expressions suivantes pour tout n, entier positif :

$$\frac{n!}{(n-1)!}, \ \frac{(n+1)!}{n!}, \ \frac{n!}{(n-2)!}, \ \frac{(n+2)!}{n!}.$$

Exercice 5

- **Formule du binôme de Newton et applications**

  ❶ Justifier l'expression suivante pour tout n, entier positif et tout nombre réel x :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

  ❷ En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$

  ❸ Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$

  Indication : Penser à dériver la formule de la question ❶.

  ❸ Simplifier l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}.$

  Indication : Penser à intégrer la formule de la question ❶.

Exercice 6

- Montrer pour tous n, k, entier positif, on a $k\dbinom{n}{k} = k\dbinom{n-1}{k-1}.$

Fin