My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Samedi 16 Janvier 2016

Devoir Surveillé N°4

Applications & Fonctions réelles

Durée : 3 heures

Calculatrice autorisée

Leonid Vitalievitch Kantorovitch (1912-1986)

Mathématicien et économiste russe, spécialiste de l'optimisation. Inventeur dans les années 1930 de la programmation linéaire, il est le seul chercheur soviétique à avoir reçu le « prix Nobel » d'économie (1975). Très doué pour les mathématiques, il fût nommé à l'age de 22 ans professeur à l'université. Il est à l'origine de la loi de la relative rareté des produits et de la théorie de l'utilité marginale. Thèse qui s'oppose à la théorie économique marxiste classique qui stipule que le prix d'un produit est déterminé par le travail incorporé directement et indirectement dans la production de ce produit.

Blaque du jour

- **Théorème** : Une personne sensée est folle.
- **Preuve** : **personne sensée=1/2personne sensée + 1/2personne sensée**. Or, une personne à moitié sensée est à moitié folle, d'où **1/2personne sensée =1/2personne folle**. Alors : **personne sensée = 1/2personne folle+1/2personne folle = personne folle**, d'où le résultat.

Exercice 1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes (justifier soigneusement votre réponse) :

$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2},\quad g(x)=\sqrt{x^2+3x+2},\quad h(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x^2+3x+2}\right).$$

Exercice 2

1. Rappeler la defintion d'une fonction paire. Quelle symétrie représente sa courbe ?
2. Rappeler la defintion d'une fonction impaire. Quelle symétrie représente sa courbe ?
3. Préciser la parité des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :

$$f(x)=x^2+1,\quad g(x)=x^3-3x,\quad h(x)=x^3-3x^2$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par

$$f: \begin{array}{ccc} [-1;1] & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ et en déduire combien $\dfrac{1}{2}$ admet d'antécédants par f.
2. Soit $y \in [-1;1]$. Résoudre l'équation $f(x) = y$ et en déduire combien y admet d'antécédants par f.
3. Que peut-on dire à propos de l'injection ? surjection ? de f.
4. Que peut-on dire à propos de la bijection de f ? Donner sa réciproque en cas de réponse affirmative.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x & \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{\sqrt{x}} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} & \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-3x+2} \end{array}$$

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier les branches infinies des fonctions suivantes (donner leur équations, leurs positions par rapport à la courbe, et à chaque fois dessiner l'allure approxiamative de la courbe) :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$;
2. $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-3x+2)}$.

Exercice 6

Extraits concours BCE (INSEEC, 2014)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{-x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Montrer que la courbe de f admet en $+\infty$ une droite asypmtote d'équation $y = x - 2$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que pouvez vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

   ☛ **Indication** : On admet que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
5. Justifier que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.
6. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$ (on donne $e \simeq 2,7$).

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
mamouni.myismail@gmail.com

Exercice 7

Extraits concours ECRICOME (2013) :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x + \dfrac{3\ln x}{x^2}$.

1 Etude asymptotique de f

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) On note $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Calculer a et b.

c) Déterminer l'équation de l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et préciser la position de cet asymptote par rapport à la courbe.

2 Etude d'une équation On admet dans ce qui suit on admet que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on considère l'équation

$$(\mathcal{E}_n) : f(x) = 2n.$$

a) Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ admet une unique solution (que l'on cherchera pas à calculer). On note x_n cette solution.

b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels $f(x_n)$, $f(1)$ et $f(n)$.
En déduire l'encadrement :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 \leqslant x_n \leqslant n.$$

c) Justifier que : $\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \dfrac{x_n}{n} = \dfrac{3\ln x_n}{2nx_n^2}$.

d) Prouver que : $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln x_n}{nx_n^2} \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.

e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$.