CNAEM 2019, corrigé

Exercice 1
$1^{ère}$ Partie
Puissance de la matrice A

1. a) $PQ = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\1-1+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\1-1+0 & 0+1-1 & 0+0+1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

b) On a constaté que $PQ = I_3$, ce qui suffit à démontrer que P est inversible, d'inverse $Q : P^{-1} = Q$

c) $AP = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\-2+1+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\-2-1+2 & 0-1+2 & 0+0+2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$PD = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0\\-1+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0\\-1+0+0 & 0+1+0 & 0+0+2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Donc, $AP = PD$

d) On a constaté que $AP = PD$, alors $A = PDP^{-1}$

P est une matrice inversible.

D est une matrice diagonale. $AP = PD \iff D = P^{-1}AP$

Donc, A est une matrice diagonalisable.

2. Soient les vecteurs suivants $u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$Au = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+0+0\\-2+1+0\\-2-1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -1u$$

u est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre -1

$$Av = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+0\\0+1+0\\0-1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 1v$$

v est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 1

$$Aw = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\-2 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+0+0\\0+0+0\\0+0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 2w$$

w est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2

3. a) On procède par récurrence sur n

Notons P_n la proposition : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$

$PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I$ et $A^0 = I$ donc, P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $A^n = PD^nP^{-1}$ donc en multipliant à gauche par A, il vient $AA^n = APD^nP^{-1}$.

Or, $AP = PD$ d'où $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$, à savoir $\forall n \geq 0 \quad A^n = PD^nP^{-1}$

b) D est diagonale donc, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

c) $\forall n \geq 0$

$$A^n = PD^nP^{-1} \iff A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n + 0 + 0 & 0 & 0 \\ 0 - 1 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 \\ 0 & -(2^n) & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\iff A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 0 + 0 & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 + 0 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 + 0 & 1 - (2^n) & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\iff A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 - (2^n) & 2^n \end{pmatrix}$$

4. la suite $(U_n)_{n\geq 0}$: $U_{n+1} = AU_n$ et $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$

a) On procède par récurrence sur n

Notons P_n la proposition : « $U_n = A^nU_0$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$

$U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A^0U_0 = I\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, P_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$.

Supposons que P_n est vraie et montrons que P_{n+1} est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $U_n = A^nU_0$ donc en multipliant à gauche par A, il vient $AU_n = AA^nU_0 = A^{n+1}U_0$

Or, $AU_n = U_{n+1}$ d'où $U_{n+1} = A^{n+1}U_0$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$, à savoir $\forall n \geq 0 \quad U_n = A^nU_0$

b) On a constaté que $\forall n \geq 0 \quad U_n = A^n U_0$

$$U_n = A^n U_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1-(2^n) & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^n \\ -((-1)^n - 1) + 1 \\ -((-1)^n - 1) + 1 - (2^n) + (2^n) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^n \\ 2-(-1)^n \\ 2-(-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\forall n \geq 0 \quad \begin{cases} a_n = -(-1)^n \\ b_n = 2-(-1)^n \\ c_n = 2-(-1)^n \end{cases}$$

c) Programme Scilab

```
n = input("Entrez la valeur de n : ")
    A = [−1, 0, 0 ; −2, 1, 0 ; −2, −1,2]
      U = [−1; 1; 1]
      For i = 1: n
          U = A * U
      end
Disp(U)
```

$2^{ème}$ Partie

Résolution de l'équation $M^3 = A$

1. Soit M une matrice carrée d'ordre trois, on pose $N = P^{-1}MP$

$$\begin{aligned} NNN &= P^{-1}MP\,P^{-1}MP\,P^{-1}MP \\ \iff N^3 &= P^{-1}MMMP \\ \iff D &= P^{-1}M^3P \\ \iff PD\,P^{-1} &= M^3 \\ \iff A &= M^3 \end{aligned}$$

Donc, $M^3 = A$ si, et seulement si, $N^3 = D$

2. Soit $ND = DN$

$ND = NN^3 = N^4 = N^3N = DN$

Donc, $N^3 = D$ si $ND = DN$

3. On sait que la matrice D est une matrice diagonale. Or, un produit de matrices diagonales reste une matrice diagonale. Et puisque $N^3 = NNN = D$ donne une matrice D diagonale. Donc, la matrice N est une matrice diagonale.
4. Les matrices N et D commutent et ce sont deux matrices diagonales.

$$N^3 = D \iff (N^3)^{\frac{1}{3}} = (D)^{\frac{1}{3}}$$
$$\iff N = (D)^{\frac{1}{3}}$$

5. Soit M_3, On pose $N = P^{-1}MP$ avec $N = (D)^{\frac{1}{3}}$

$N = P^{-1}MP \iff PN\,P^{-1} = M$

$$\Leftrightarrow \quad P(D)^{\frac{1}{3}} P^{-1} = M$$

$$\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2^{\frac{1}{3}} & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ (-1)^{\frac{1}{3}} - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^{\frac{1}{3}} - 1 & 1 - 2^{\frac{1}{3}} & 2^{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. a) $\forall x \geq 1, \quad \int_1^x e^{-(t-1)}\, dt = -\int_1^x -(t-1)' e^{-(t-1)}\, dt$

$$= -\left[e^{-(t-1)}\right]_1^x$$
$$= -(e^{1-x} - e^{1-1})$$
$$= 1 - e^{1-x}$$

b) $\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)}\, dt = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-(t-1)}\, dt$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 - e^{1-x} = 1$$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$; On pose $X = (1 - x)$ donc, $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

2. Densité de probabilité
   - $t \longrightarrow e^{-(t-1)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $t \longrightarrow 0$ est continue sur $]-\infty, 1[$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 1. De plus, f admet clairement des limites finies en 1^+ et 1^- donc f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - Sur $]-\infty, 1[$, f est nulle donc positive. Si $t \geq 1$, $f(t) \geq 0$ car e^t est toujours positive. Donc f est bien positive sur $\mathbb{R}$.
   - Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$. Puisque f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a $\int_{-\infty}^{1} f(t)\, dt = 0$ et donc sous réserve d'existence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$. D'après la question précédente $\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)}\, dt = 1$. Ce qui preuve que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et que $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.

   En conclusion, f peut être considérée comme une densité de probabilité.

3. Fonction de répartition F_X de X

$$\forall x \in \mathbb{R}. \qquad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

   - Si $x < 1$ alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, 1[$ donc $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$
   - Si $x \geq 1$ et en utilisant la relation de Chasles.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0\, dt + \int_1^x e^{-(t-1)}\, dt$$
$$= \int_1^x e^{-(t-1)}\, dt$$
$$= -\left[e^{-(t-1)}\right]_1^x$$
$$= 1 - e^{1-x}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est bien donnée par :
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ 1 - e^{1-x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

4. Sous réserve d'existence, et puisque f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a :
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} tf(t)\,dt$$
Soit $A \geq 1$, on pose $I_A = \int_1^A tf(t)\,dt = \int_1^A t\,e^{-(t-1)}\,dt$. On procède par I.P.P

Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-(t-1)} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-(t-1)} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_0^A t\,e^{-(t-1)}\,dt &= \left[-te^{-(t-1)}\right]_1^A + \int_1^A e^{-(t-1)}\,dt \\ &= -Ae^{-(A-1)} + 1 + \int_1^A e^{-(t-1)}\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X) &= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A tf(t)\,dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left(-Ae^{-(A-1)} + 1 + \int_1^A e^{-(t-1)}\,dt\right) \\ &= 0 + 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

Car, $\lim_{A\to+\infty} -Ae^{-(A-1)} = 0$ et $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A e^{-(t-1)}\,dt = 1$

5. a) Sous réserve d'existence, et puisque f est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a :
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$
Soit $A \geq 1$, on pose $J_A = \int_1^A t^2 f(t)\,dt = \int_1^A t^2\,e^{-(t-1)}\,dt$. On procède par I.P.P

Posons $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = e^{-(t-1)} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = -e^{-(t-1)} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_0^A t^2 e^{-(t-1)}\,dt &= \left[-t^2 e^{-(t-1)}\right]_1^A + 2\int_1^A te^{-(t-1)}\,dt \\ &= -A^2 e^{-(A-1)} + 1 + 2\int_1^A te^{-(t-1)}\,dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A tf(t)\,dt \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left(-A^2 e^{-(A-1)} + 1 + 2\int_1^A te^{-(t-1)}\,dt\right) \\ &= 1 + 2E(X)\end{aligned}$$

Car, $\lim_{A\to+\infty} -A^2 e^{-(A-1)} = 0$

b) $$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 1 + 2E(X) - E(X)^2 \\ &= 1 + 2\times 2 - 2^2 = 1\end{aligned}$$

6. Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - 1$

a) $$\begin{aligned}E(Y) = E(X-1) &= E(X) - 1 \\ &= 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}V(Y) = V(X-1) &= V(X) \\ &= 1\end{aligned}$$

c) Fonction de répartition F_Y de Y
$$\begin{aligned}F_Y(x) = P(Y \leq x) &= P(X - 1 \leq x) \\ &= P(X \leq x + 1) \\ &= F_X(x+1)\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_Y de Y est bien donnée par :

$$F_Y(x) = F_X(x+1) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

7. $$\forall n \geq 1 \qquad f_n(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{n} \\ e^{-\left(t-\frac{1}{n}\right)} & si\ t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

a) Densité de probabilité

- $t \longrightarrow e^{-\left(t-\frac{1}{n}\right)}$ est continue sur $\left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$ et $t \longrightarrow 0$ est continue sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en $\frac{1}{n}$. De plus, f admet clairement des limites finies en 1^+ et 1^- donc f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$, f_n est nulle donc positive. Si $t \geq \frac{1}{n}$, $f_n(t) \geq 0$ car e^t est toujours positive. Donc f_n est bien positive sur $\mathbb{R}$.
- Il reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dt = 1$. Puisque f_n est nulle sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$, on a $\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} f_n(t)\, dt = 0$ et donc sous réserve d'existence, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t)\, dt$.

  Soit $A \geq \frac{1}{n}$, on pose $K_A = \int_{\frac{1}{n}}^{A} f_n(t)\, dt$

  $$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{A} f_n(t)\, dt &= \int_{\frac{1}{n}}^{A} e^{-\left(t-\frac{1}{n}\right)}\, dt \\ &= -\left[e^{-\left(t-\frac{1}{n}\right)}\right]_{\frac{1}{n}}^{A} \\ &= 1 - e^{-\left(A-\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

  $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \lim_{A \to +\infty} 1 - e^{-\left(A-\frac{1}{n}\right)} = 1 \quad$ Car, $\lim_{A \to +\infty} e^{-\left(A-\frac{1}{n}\right)} = 0$

  Ce qui preuve que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t)\, dt$ converge et que $\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\, dt = 1$.

  En conclusion, f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

b) i) Fonction de répartition F_{X_n} de X_n.

- Si $x < \frac{1}{n}$ alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, 1[$ donc $F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$
- Si $x \geq \frac{1}{n}$ et en utilisant la relation de Chasles.

  $$\begin{aligned} F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t) dt &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} 0\, dt + \int_{\frac{1}{n}}^{x} e^{-\left(t-\frac{1}{n}\right)}\, dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^{x} e^{-\left(t-\frac{1}{n}\right)}\, dt \\ &= -\left[e^{-\left(t-\frac{1}{n}\right)}\right]_{\frac{1}{n}}^{x} \\ &= 1 - e^{-\left(x-\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est bien donnée par :

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < \frac{1}{n} \\ 1 - e^{-(x-\frac{1}{n})} & si\ x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

ii) Fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n.

$$\begin{aligned} F_{Y_n} = P(Y_n \leq x) &= P\left(X_n - \frac{1}{n} \leq x\right) \\ &= P\left(X_n \leq x + \frac{1}{n}\right) \\ &= F_{X_n}\left(x + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_X de X est bien donnée par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

c) Sous réserve d'existence, et puisque f_n est nulle sur $\left]-\infty, \frac{1}{n}\right[$, on a :

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\, dt = \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} t f_n(t)\, dt$$

Soit $A \geq 1$, on pose $I_A = \int_{\frac{1}{n}}^{A} t f_n(t)\, dt = \int_{\frac{1}{n}}^{A} t\, e^{-(t-\frac{1}{n})}\, dt$. On procède par I.P.P

Posons $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-(t-\frac{1}{n})} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-(t-\frac{1}{n})} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{A} t\, e^{-(t-\frac{1}{n})}\, dt &= \left[-te^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^{A} + \int_1^A e^{-(t-1)}\, dt \\ &= -Ae^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} + \left[-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^{A} \\ &= -Ae^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} - e^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \lim_{A \to +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{A} t f_n(t)\, dt \\ &= \lim_{A \to +\infty} -Ae^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} - e^{-(A-\frac{1}{n})} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} E(Y_n) = E\left(X_n - \frac{1}{n}\right) &= E(X_n) - \frac{1}{n} \\ &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} P\left(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n}\right) &= F_{X_n}\left(\frac{3}{n}\right) - F_{X_n}\left(\frac{2}{n}\right) \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{3}{n}-\frac{1}{n}\right)} - \left(1 - e^{-\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n}\right)}\right) \\ &= -e^{-\left(\frac{2}{n}\right)} + e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-\left(\frac{1}{n}\right)} - e^{-\left(\frac{2}{n}\right)} \end{aligned}$$

f) Calcul avec Scilab

```
n=1
P=exp(-(1/n))-exp(-(2/n))
While P>=10^(-5)
    P=exp(-(1/n))-exp(-(2/n))
    n=n+1
end
disp(n)
```

Exercice 3

1. a) Le dé est cubique donc $X(\Omega) = [\![1\,,6]\!]$. De plus, le dé est équilibré donc chaque face a la même probabilité d'apparaître : $\forall k \in [\![1\,,6]\!]$, $\quad P(X = k) = \frac{1}{6}$

   Donc, X suit la loi uniforme de paramètre 6.

   b) $E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{7}{2} \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{35}{12}$

2. a) Pour $k = 1$, on lance la pièce de monnaie une seule fois. L'événement $(Y = 0)$ se produit lorsqu'on obtient pile lors de l'unique lancer effectué. Donc $P_{(X=1)}(Y = 0) = \frac{1}{3}$.

   b) Pour $k \in \{2,3,4,5,6\}$, on lance la pièce de monnaie deux fois. L'évènement $(Y = 0)$ se produit lorsqu'on obtient pile lors des deux lancers effectués. Donc, $k \in \{2,3,4,5,6\}$, $P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

   c) $(X = 1)$ et $X \in \{2,3,4,5,6\}$ forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale :

$$\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(\{Y = 0\} \cap \{X = 1\}) + \textstyle\sum_{k=2}^{6} P(\{Y = 0\} \cap \{X = k\} \\
&= P_{(X=1)}(Y = 0)P(X = 1) + \textstyle\sum_{k=2}^{6} P_{(X=k)}(Y = 0)P(X = k) \\
&= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{6} + \textstyle\sum_{k=2}^{6} \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{6} \\
&= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{6} + (6 - 2 + 1) \times \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{6} = \tfrac{4}{27}
\end{aligned}$$

3. L'évènement $(Y = 2)$ se produit lorsqu'on obtient deux faces lors des deux lancers effectués. Or, pour lancer la pièce de monnaie deux fois il faut que $X \in \{2,3,4,5,6\}$ $X \in \{2,3,4,5,6\}$ et $(X = 1)$ forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale :

$$\begin{aligned}
P(Y = 2) &= P(\{Y = 2\} \cap \{X = 1\}) + \textstyle\sum_{k=2}^{6} P(\{Y = 2\} \cap \{X = k\} \\
&= 0 + \textstyle\sum_{k=2}^{6} P_{(X=k)}(Y = 2)P(X = k) \\
&= \textstyle\sum_{k=2}^{6} \tfrac{1}{6} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} \\
&= (6 - 2 + 1) \times \tfrac{1}{6} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{10}{27}
\end{aligned}$$

4. L'événement $(Y = 1)$ se produit lorsqu'on obtient face. Ainsi que la somme des probabilités de $(Y = 0)$, $(Y = 1)$ et $(Y = 2)$ est égale à 1. Donc,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{2} P(Y = k) = 1 &\iff P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 1 \\
&\iff P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 2) \\
&\iff P(Y = 1) = 1 - \tfrac{4}{27} - \tfrac{10}{27} \\
&\iff P(Y = 1) = \tfrac{13}{27}
\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}
E(Y) &= 0 \times \tfrac{4}{27} + 1 \times \tfrac{13}{27} + 2 \times \tfrac{10}{27} \\
&= 0 + \tfrac{13}{27} + \tfrac{20}{27} = \tfrac{11}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(Y) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= 0^2 \times \tfrac{4}{27} + 1^2 \times \tfrac{13}{27} + 2^2 \times \tfrac{10}{27} - \left(\tfrac{11}{9}\right)^2 \\
&= \tfrac{53}{27} - \tfrac{121}{81} = \tfrac{38}{81}
\end{aligned}$$

6. a) La loi du couple (X,Y)

y \ x	1	2	3	4	5	6	Y
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{4}{27}$
1	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{13}{27}$
2	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{10}{27}$
X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Exemple de calcule : $P(\{Y=0\}\cap\{X=1\}) = P(\{X=1\})P_{(X=1)}(\{Y=0\}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

b) D'après le tableau de la loi du couple (X,Y)

$P(\{Y=2\}\cap\{X=1\}) = 0$ et $P(\{Y=2\})\times P(\{X=1\}) = \frac{10}{27}\times\frac{1}{6} = \frac{5}{81}$

Donc, $P(\{Y=2\}\cap\{X=1\}) \neq P(\{Y=2\})\times P(\{X=1\})$

Donc, X et Y ne sont pas indépendantes.

c) La covariance $Cov(X,Y)$ de X et Y.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{6} ij \times P(\{Y=i\}\cap\{X=j\})$$

$$= \frac{2}{18} + \frac{4}{27} + \frac{6}{27} + \frac{8}{27} + \frac{10}{27} + \frac{12}{27} + 4\times\frac{2}{27} + 6\times\frac{2}{27} + 8\times\frac{2}{27} + 10\times\frac{2}{27} + 12\times\frac{2}{27}$$

$$= \frac{41}{9}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{41}{9} - \frac{7}{2}\times\frac{11}{9} = \frac{5}{18}$$

d) Le coefficient de corrélation $\rho(X,Y)$

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(x)V(Y)}} = \frac{\frac{5}{18}}{\sqrt{\frac{35}{12}\times\frac{38}{81}}} = 0{,}237$$

Exercice 4

1. M_1 et M_2 forment un système complet d'événement et d'après la formule de probabilité totale :

$$P(C) = P(M_1)P_{M_1}(C) + P(M_2)P_{M_2}(C)$$
$$= 0{,}99a + 0{,}96(1-a)$$
$$= 0{,}99a + 0{,}96 - 0{,}96a$$
$$= 0{,}03a + 0{,}96$$

2. On sait que $P(C) = P(M_1)P_{M_1}(C) + P(M_2)P_{M_2}(C)$

Et d'après la question précédente on a trouvé que

$$P(C) = 0{,}03a + 0{,}96 \iff 0{,}97 = 0{,}03a + 0{,}96$$
$$\iff 0{,}97 - 0{,}96 = 0{,}03a$$
$$\iff 0{,}01 = 0{,}03a$$
$$\iff a = \frac{1}{3}$$

Donc, $P_{M_1}(C) = \frac{1}{3}$ et $P_{M_2}(C) = \frac{2}{3}$

3. a) X compte le nombre de réalisation de l'événement « succès obtenir un crayon commercialisé » de probabilité 0,97 lors de 10 prélèvements identiques et indépendants d'un crayon. Donc, suit la loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0,97$. Par suite :
$X(\Omega) = [\![0\,,10]\!]$ et $\forall k \in [\![0\,,10]\!]$ $P(X = k) = \binom{10}{k}(0,97)^k(0,03)^{10-k}$

b) $P(X = 10) = \binom{10}{10}(0,97)^{10}(0,03)^{10-10} = 1 \times (0,97)^{10} \times 1 = (0,97)^{10}$

c) Il s'agit de calculer la probabilité $P(X \geq 9)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= \binom{10}{9}(0,97)^9(0,03)^{10-9} + (0,97)^{10} \\ &= 10 \times 0,76 \times 0,03 + (0,97)^{10} \\ &= 0,228 + 0,737 = 0,965 \end{aligned}$$

d) Calcul avec Scilab

```
n=input('Entrez la valeur de n(entier) :')
M=grand(1,n,'bin',10,0.97)
Disp(M)
```

4. a) On a $P(M_1) = a$ $P(M_2) = 1 - a - b$ $P(M_3) = b$

$$P(c) = P(M_1)P_{M_1}(C) + P(M_2)P_{M_2}(C) + P(M_3)P_{M_3}(C)$$
$$\Leftrightarrow \quad 0,99 = 0,99a + 0,96(1 - a - b) + P_{M_3}(C)b$$
$$\Leftrightarrow \quad 0,99 = 0,99a + 0,96 - 0,96a - 0,96b + P_{M_3}(C)b$$
$$\Leftrightarrow \quad P_{M_3}(C)b = 0,99 - 0,96 - 0,99a + 0,96a + 0,96b$$
$$\Leftrightarrow \quad P_{M_3}(C) = \frac{0,03-0,03a+0,96b}{b}$$

b) $P_{M_3}(C) \geq 0,999$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \frac{0,03-0,03a+0,96b}{b} \geq 0,999 \\ &\Leftrightarrow \quad 0,03 - 0,03a + 0,96b \geq 0,999b \\ &\Leftrightarrow \quad 0,03 - 0,03a + 0,96b - 0,999b \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0,03 \geq 0,03a + 0,039b > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geq a + \frac{0,039}{0,03}b > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geq a + \frac{39}{30}b > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{13}{10}b + a \leq 1 \end{aligned}$$

c) i) Y est le temps d'attente du premier succès « obtenir un crayon non commercialisable » de Probabilité 0,001 lors de tirages identiques et indépendants d'un crayon. Donc, Y suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,001$.

ii) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(Y = k) = 0,001(0,999)^{k-1}$

iii) D'après le cours,

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,001} = 1000 \text{ et } V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0,001}{(0,001)^2} = 999000$$

iv) Calcul avec Scilab

```
m=input('Entrez la valeur de m(entier) :')
M=grand(m,1,'geom',10,0.97)
Disp(M)
```

-FIN DU CORRIGÉ-