Bonjour

Méthode des éléments Finis

- Kanber Ahmed LAMAI
Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Inforr

Faculté des Sciences et Techniques
de Marrakech

20 mars 2008

Plan de l'exposé

Calcul scientifique

- Simulation des Phénomènes Physiques
- $19me$ siècle, les expériences et les solutions
- $20me$ siècle, la méthode de Rayleigh-Ritz
- De nos jours : Approche numérique
- Méthode des éléments Fini
- Méthode des volumes Fini

$$\begin{cases} -\Delta(u) = -u''(x) = f(x), & x \in]0,1[\,; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

On discritise l'intervalle $[0, 1]$ en posant :

$h = \dfrac{1}{M}$, $x_i = (i-1) * h, i = 1, 2, \ldots M+1$ par l'approximation

$f''(x) \simeq \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}$ On obtient le problème appro

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 1, & i = 2, \ldots \ldots M\,; \\ u_1 = u_{M+1} = 0, \end{cases}$$

Soit alors $AU = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}, B = h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inconvénients

La méthode n'est pas modulaire :

Si on change les conditions aux bord la matrice change. La progra
matrice est à refaire.

$$\begin{cases} -\Delta(u) = -u''(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\,; \\ u'(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

La matrice devient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & -1 \end{pmatrix}$$

Géométrie du domaine

Géométrie du domaine :

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f(x), & x \in \Omega\,; \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma\,; \end{cases}$$

$$x_i = (i-1) * h, i = 1 \ldots M+1$$

$$y_j = (j-1) * k, j = 1, \ldots N+1$$

$$u_i j \backsimeq u(x_i, x_j)$$

Quelques Modèle Physiques : Solutions Numériques Gfrem

Membranes :

Une membrane élastique Ω est collée sur un support plan rigide Γ
presse sur chaque élément de surface $dx = dx_1 dx_2$. Le déplacem
membrane, $\phi(x)$, est solution de l'équation de Laplace :

$$-\Delta\phi = f \ \ dans \, \Omega$$

Comme la membrane est collée sur son support plan on a :

$$\phi \backslash \Gamma = 0$$

C'est le problème de Dirichlet homogène pour l'opérateur de Lapla

Acoustique

Acoustique :

Les variations de pression dans l'air au repos sont régies par l'équ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - c^2 \Delta u = f$$

Lorsque l'onde solution est monochromique
u est de la forme $u(x,t) = v(x)e^{ikt}$ avec v solution de l'équation d

$$\begin{cases} k^2 v + c^2 \Delta v = f, & x \in \Omega\,; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 & (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

Equations de Navier-Stokes

Equations de Navier-Stokes :

Un fluide visqueux incompressible vérifie :

$$\begin{cases} \partial_t u + u.\nabla u + \nabla p - \nu \triangle u = 0, \nabla.u = 0 \quad (x,t) \in \Omega \\ u\backslash_{t=0} = u^0 \\ u\backslash\Gamma = u_\Gamma \end{cases}$$

Dans le cas des écoulements à faible nombre de Reynolds (micro
exemple)l'équation devient :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = 0, \\ \nabla.u = 0 \end{cases}$$

voir document Free-Fem

Éléments Finis

Définition

c'est un triplet $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{L})$ *avec :*

- $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^N$ *un domaine connexe avec bord régulier.*
- $\mathcal{P}$ *espace de dimension k de fonctions de* $\mathcal{K}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(**Fonctio***
- $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_k\}$ *base de* $\mathcal{P}^\star$ *(**Ensemble de degré de libert***

Éléments Finis de Lagrange

Éléments Finis triangulaires :

Soit $K = \widehat{z_1 z_2 z_3}$ un triangle de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{P}_k = \mathbb{R}_k[x, y]$ on a $\dim(\mathcal{P}_k) = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Pour $k = 1$ $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3\}$

Avec $\mathcal{L}_i(P) = P(z_i)$ (**Éléments Finis de Lagrange**)

$$N_1^K(x,y) = 1 - \frac{1}{2aire(K)}[(y_{i3} - y_{i1})(x - x_{i1}) - (x_{i3} - x_{i1})(y - y_{i}$$

$$(y_{i2} - y_{i1})(x - x_{i1}) + (x_{i2} - x_{i1})(y - y_{i1})]$$

$$N_2^K(x,y) = \frac{1}{2aire(K)}[(y_{i3} - y_{i1})(x - x_{i1}) -$$

$$(x_{i3} - x_{i1})(y - y_{i1})]$$

$$N_3^K(x,y) = \frac{1}{}[-(y_{i2} - y_{i1})(x - x_{i1})$$

Maillage

On suppose que Ω est un ouvert "à frontière polyèdrique".
Soit $T_h = \{K_i, i = 1 \dots m,\ avec\ K_i\ triangle\ \}$,
$h = \max_i h_i$ avec h_i= diamètre du triangle.

Définition

On dira que T_h est une triangulation de Ω si et seulement si :

- *1) $K_i^\circ \cap K_j^\circ = \emptyset$ pour $i \neq j$*
- *2) $K_i \cap K_j$ est soit l'ensemble $\emptyset$ soit une arrête ou un sommet.*
- *3) $\bigcup_{i=1}^{m} K_i = \Omega$*

Détermination Pratique du maillage

Le maillage d'un domaine dépend de la géométrie du domaine. Si
simple on peut la construire facilement à partir d'un programme qu
ci-dessous. Si la géométrie est complexe, on peut utiliser des logic
Modulef,. . .).

Le maillage d'un domaine consiste à determiner les tableaux suiva

1. **coordonnés.dat** : ce tableau à trois colonnes est formé ainsi
    - la colonne 1 contient les **numéro des noeuds**
    - la colonne 2 contient les **abscisses des noeuds**
    - la colonne 2 contient les **ordonnés des noeuds**
2. **élément.dat** : ce tableau à quatre colonnes est formé ainsi :
    - la colonne 1 contient les **numéro des triangles**
    - les colonnes 2,3 et 4 contiennent les **numéros des noeuds** du
3. **bord.dat** : ce tableau à une colonnes est formé par les numér bord.

voir exemple

Théorème de Lax-Milgram

Soit H un Hilbert, V un hilbert $V \hookrightarrow H$.
V' l'espace des formes linéaires continue sur V.
si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si on prend $H = H^1(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$ a

Définition

On dit qu'une forme sésquilinéaire a sur V est coercive sur V si :

$$\exists c > 0 \textit{ tel que } \forall u \in V \quad |a(u,u)| \geq c\|u\|_V^2$$

On défint l'opérateur :

$$\begin{aligned} A : V &\longrightarrow V' \\ u &\longmapsto Au \end{aligned}$$

avec : $< Au, v >= a(u,v)$

Théorème de Lax-Milgram

Théorème

Si est a est coercive sur V alors l'opérateur A qui lui est associé est un isomorphisme de V sur V'

Existence et unicité de la solution : Dirichlet

Problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta(u) = f(x), & x \in \Omega\,; \\ u(x,y) = g(x,y, & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Formulation Variationnelle

Formulation Variationnelle

On multiplie par une fonction test $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ puis on intègre sur Ω

$$\int_\Omega -\Delta(u)v(x,y)dxdy = \int_\Omega f(x,y)v(x,y)dxdy$$

On applique Green-Rieman on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u(x,y)\nabla v(x,y)dxdy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}v(\sigma)d\sigma = \int_\Omega f(x,y)v(x,y)$$

le deuxième terme est nulle si $v \in H_0^1(\Omega)$

Formulation Variationnelle du Problème de Dirichlet

$$FVD : \begin{cases} \textit{Trouver } \; u \in H^1(\Omega) \textit{ telle que } \; u(x,y) = g(x,y, \\ \int_\Omega \nabla u(x,y) \nabla v(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y) v(x,y) dxdy, \end{cases}$$

Formulation Variationnelle Approchée

Formulation Variationnelle Approc

On munie Ω d'une triangulation Voir 4.1.
On construit l'espace d'approximation :

$$V_h^1 = \{v_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : v_h/_{K_i} \in P_1\}$$

Théorème

On démontre les résultats suivant :

1. V_h^1 *est un espace vectoriel de dimension fini en outre* $\dim(V_h^1) = n$ *: nombre du noeud du maillage.*
2. $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ *base canonique de* V_h^1 *vérifie :*

Formulation Approchée

Le Problème Approché devient :

$$FVA : \begin{cases} \textit{Trouver } \; u_h \in V_h^1 \; \textit{telle que } \; u_h(x,y) = g(x,y) & (x \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_h(x,y) \nabla v_h(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y) v_h(x,y) dxdy, & \forall v \end{cases}$$

Remarque

Pour $z_j \in \partial\Omega$ *alors* $u_h(z_j) = g(z_j)$ *est connue.*

La $(FVA) \Leftrightarrow$:

$$FVAD : \begin{cases} Trouver \;\; u_h \in V_h^1 \;\; telle\ que \;\; u_h(x,y) = g(x,y, \\ \int_\Omega \nabla u_h(x,y) \nabla \Phi_i(x,y) dxdy = \int_\Omega f(x,y) \Phi_i(x,y) dxdy, \end{cases}$$

On va définir deux ensembles d'indices :

$$J_0 = \{j \in [1:M] \; tel\ que \;\; , z_j \in \partial\Omega\}$$

$$J = setdiff(1:M, J_0)$$

Résolution Numérique du PVAD

$$u_h \in V_h^1 \text{ donc } u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \Phi_j(x,y) = \sum_{j \in J_0} \alpha_j \Phi_j(x,y) + \sum_{j \in J} \alpha_j \Phi_j($$

problème PVAD revient donc à trouver $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq M}$ tel que :

$$\begin{cases} \alpha_j = g(z_j), & j \in J_0 \\ \displaystyle\sum_{j \in J} \int_\Omega \nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)\alpha_j dxdy & = \\ & \displaystyle\int_\Omega f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy - \\ & \displaystyle -\sum_{j \in J_0} \int_\Omega g(z_j)\nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(\end{cases}$$

Discritisation du PVA

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq M}$ avec $a_{i,j} = \int_\Omega \nabla \Phi_j(x,y) \nabla \Phi_i(x,y) dx$

$A :\leftarrow$ **Matrice de rigidité**

$b = (b_i)_{1 \leq i,j \leq M}$ avec $b_i = \int_\Omega f(x,y) \Phi_i(x,y) dxdy$ et $G = (G(i))_{1 \leq i,j \leq}$
$G(j) = g(z_j)$ si $j \in J_0$ et 0 sinon.

Système Linéaire

Le problème revient donc à trouver $\alpha \in \mathbb{R}^M$ tel que :
$\alpha_j = g(z_j)$ *si* $j \in J_0$ *et* $A(J,J)\alpha(J) = B(J) - A.G$

Procédé d'assemblage

Comment calculer $a_i j$?

$$a_{i,j} = \int_\Omega \nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{N}\int_{K_k}\nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)dxdy$$

Comment calculer b_i?

$$b_i = \int_\Omega f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{N}\int_{K_k} f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy$$

Contributions des K_i

On a :

$$\int_{K_k} \nabla\Phi_j(x,y)\nabla\Phi_i(x,y)dxdy = \int_{K_k} \nabla(\Phi_j/_{K_k})(x,y)\nabla(\Phi_i/_{K_k})(x,y$$

Or $\Phi_i/_{K_k} = N_{km}^{K_k}$ et $\Phi_j/_{K_k} = N_{kl}^{K_k}$, $\;kl, km \in 1,2,3$ et

$\Phi_i/_{K_k} = 0$ si $i \notin T^{K_k} \leftarrow$ numéro des noeud du triangle K_k.

En résumé on a :

$$Si\ i,j \in T^{K_k},\ Alors\ a_{i,j} = \int_{K_k} \nabla(N_{kl}^{K_k})\nabla(N_{km}^{K_k})dxdy$$

On a de même :

$$Si\ i \in T^{K_k},\ Alors\ b_i = \int_{K_k} N_{kl}^{K_k} f(x,y)dxdy$$

Matrices élémentaires

On définit ainsi les matrices élémentaires :

Théorème

$$E^K = (E^K_{l,m})_{1\leq l,m\leq 3}$$

et

$$F^K = (F^K_l)_{1\leq l\leq 3}$$

par :

$$E^K_{l,m} = \int_K \nabla(N^K_{kl})\nabla(N^K_{km})dxdy$$

$$F^K_l = \int_K N^K_{kl} f(x,y)dxdy$$

Remarque

Pour le calcul des intégrales, on l'approximation la formule de qua Gauss-Legendre :

$$\int\int_K h(x,y)dxdy \simeq \frac{aire(K)}{3}(h(\widehat{z}_1 + \widehat{z}_2 + \widehat{z}_3)$$

$\widehat{z}_i$ *sont les milieus des sommets et* $aire(K) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

Assemlage

Assemblage

Début Pour $i = 1$ à nbr des éléments Faire

$T = element(i, 1)$;

$e_x = coord(T, 1)$;

$e_y = coord(T, 2)$;

$K_e = matelt(e_x, e_y)$;

$F_e = secmebre(e_x, e_y)$;

$A(T, T) = A(T, T) + K_e$;

$B(T) = B(T) + F_e$;

FinPour

Fin.

Remarque

On TP on a va résoudre le problème de Dirichlet généralisé suivar

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}(x,y) = f(x,y)) \\ u(\sigma) = g(\sigma), \end{cases}$$

voir TP1

Problème de Newman

$$\begin{cases} a(x,y)u(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y}(x,y) = \\ \frac{\partial u}{\partial V_A}(\sigma) = g(\sigma), \end{cases}$$

Avec $\frac{\partial u}{\partial V_A}$ désigne la dérivée conormale de u par rapport à l'opéra

$A = -\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_1\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_2\frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial u}{\partial V_A} = \sigma_1(\sigma)\frac{\partial u}{\partial x}n_1(\sigma) + \sigma_2(\sigma)\frac{\partial u}{\partial y}n_2(\sigma)$$

Formulation Approchée

On démontre de même que le problème revient à : trouver $(\alpha_j)_{1\leq j\leq}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j\in J}\int_\Omega a(x,y)\Phi_j(x,y)\Phi_i(x,y)\alpha_j dxdy \qquad = \\ \displaystyle\int_\Omega f(x,y)\Phi_i(x,y)dxdy - \\ \displaystyle -\sum_{j\in J_0}\int_\Omega \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x}\Phi_j(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\Phi_i(x,y)dxdy \\ \displaystyle -\sum_{j\in J_0}\int_\Omega \sigma_2 \frac{\partial}{\partial y}\Phi_j(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\Phi_i(x,y) \end{array} \right.$$

Problème de Robin

$$\begin{cases} a(x,y)u(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma_1(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}(\sigma_2(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}(x,y) = \\ u(x,y) = g(x,y), \\ \alpha u(x,y) + \beta\sigma_1(\sigma)\dfrac{\partial u}{\partial x}n_1(\sigma) + \beta\sigma_2(\sigma)\dfrac{\partial u}{\partial y}n_2(\sigma) = h(x,y) \end{cases}$$

Problème de Robin

L'espace est $V = \{v \in H^1(\omega),\ tel\ que\ \ v = 0\ sur\ \ \Gamma_1\}$. L'opérateur

$$\begin{array}{rcl} A : V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \longmapsto & \int_\Omega auv + \int_\Omega \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \int \end{array}$$

La forme linéaire :

$$\begin{array}{rcl} L : V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\beta} hv \end{array}$$

Théorème

On a les résultat suivant :

- *si* $mes(\Gamma_1) > 0$ *alors* V *est s.e.v fermé de* $H^1(\Omega)$.
- *l'opérateur A est continue est coercive*
- *La forme linéaire L est continue sur* V.

Le théorème de Lax-Milgram nous assure l'existence et l'unicité d

Résolution Numérique du PVAD

On pose $J_0 = \{j \in [1:M]$ *tel que* $, z_j \in \Gamma_1\}, J = setdiff(1:M, J_0)$.

$u_h(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \Phi_j(x,y) = \sum_{j \in J_0} \alpha_j \Phi_j(x,y) + \sum_{j \in J} \alpha_j \Phi_j(x,y)$. La résol
PVAD revient donc à trouver $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq M}$ tel que :

$$\begin{cases} \alpha_j = g(z_j), & j \in J_0 \\ \sum_{j \in J} a_{i,j} \alpha_j & = b_i \end{cases}$$

avec

$$a_{i,j} = \int_\Omega a(x,y)\Phi_i\Phi_j + \int_\Omega \sigma_1 \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \sigma_2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial \Phi_j}\frac{\partial v}{\partial y} + \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{\beta}\Phi_i\Phi_j$$

et $b_i = \int f\Phi_i + \int \frac{1}{\beta} h\Phi_i$

Merci de votre attention